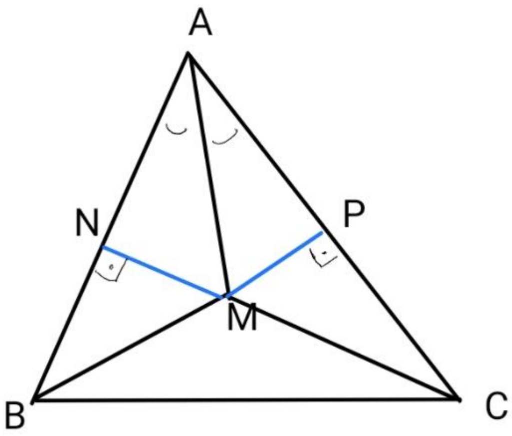
Problema 1.

Arătaţi că, în orice triunghi neisoscel mediatoarea unei laturi intersectează bisectoarea unghiului opus laturii respective în exteriorul triunghiului.

Soluţie



Presupunem că punctul M de intersecţie dintre bisectoarea unghiului A şi mediatoarea laturii BC se află în interiorul triunghiului ABC. Considerăm $N = pr_{AB}M \in (AB)$ şi $P = pr_{AC}M \in (AC)$.

Avem că $\Delta AMN \equiv \Delta AMP \Rightarrow AN \equiv AP$, iar pe de altă parte $\Delta MNB \equiv \Delta MPC \Rightarrow BN \equiv CP$, deci $AB \equiv AC$, contradicţie cu $AB \neq AC$.

Dacă punctul M se află pe segmentul BC, atunci M este chiar mijlocul laturii BC şi, aflându-se şi pe bisectoarea unghiului A, rezultă că $AB \equiv AC$ - contradicţie.

Problema 2

Determinaţi toate numerele întregi *m* şi *n* pentru care $1+5\cdot 2^m = n^2$.

Soluţie.

Evident *n* este număr impar. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $5\cdot 2^m = (n-1)(n+1)$.

Cum $(n-1, n+1) = 2 \Rightarrow n-1 = 2p_1;\ n+1 = 2p_2$ cu $(p_1, p_2) = 1$ şi $p_1 < p_2$, deci $5\cdot 2^{m-2} = p_1 \cdot p_2$.

Avem cazurile:

$p_1 = 1 \Rightarrow n = 3$ imposibil

$p_1 = 2 \Rightarrow n = 5$ imposibil

$p_1 = 4 \Rightarrow n = 9$ şi $m = 4$

$p_1 = 5 \Rightarrow n = 11$ imposibil.

În final numerele sunt $n = \pm 9$ şi $m = 4$.

Olimpiadă Australia

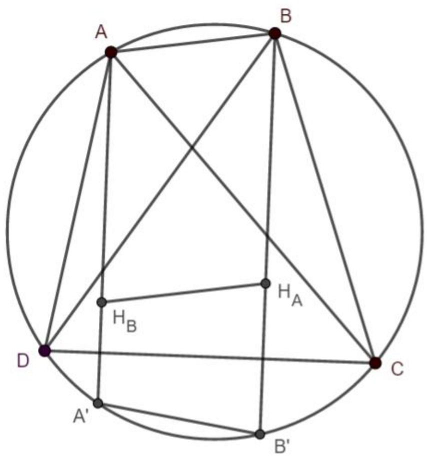
Problema 3

Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$, H_A, H_B, H_C şi H_D respectiv ortocentrele triunghiurilor BCD, *ACD*, *ABD* şi *ABC*.

a) Arătaţi că ABH_AH_B este paralelogram .

b) Arătaţi că patrulaterele $ABCD$ şi $H_AH_BH_CH_D$ sunt congruente.

Soluţie



Punctele $A' = sim_{DC} H_B$ şi $B' = sim_{DC} H_A$ aparţin cercului circumscris triunghiului *ABC*, mai mult, $H_BH_A = sim_{BC} A'B'$, deci $H_AH_B \equiv B'A'$.

Distingem două cazuri.

Dacă $AB \nparallel CD \Rightarrow ABB'A'$ este un trapez inscriptibil, deci este isoscel, de unde rezultă că $AB \equiv A'B'$.

Deci în patrulaterul ABH_AH_B avem că $AH_B \parallel BH_A$ şi $AB \equiv H_BH_A$ deci este paralelogram sau trapez. Cum $H_BH_A = sim_{DC} A'B'$ şi $AB \nparallel A'B'$, rezultă că $AB \parallel H_BH_A$.

Dacă $AB \parallel CD \Rightarrow ABB'A'$ este dreptunghi $\Rightarrow$ ABH_AH_B este dreptunghi.

b) Din a) rezultă că patrulaterele $ABCD$ şi $H_AH_BH_CH_D$ au toate laturile şi diagonalele respectiv congruente, deci sunt congruente.

Problema 4

Este posibil ca să aranjăm toate numerele 1,2,3,...,8 în vârfurile unui cub astfel încât sumele numerelor de pe muchiile cubului să fie diferite?

Soluţie

Presupunem că este posibilă o asemenea aranjare a numerelor în vârfurile cubului.

Suma tuturor numerelor de pe muchiile cubului este egală cu $3(1+2+...+8)=108$.

Cea mai mică valoare a sumei de pe o muchie este 3, iar cea mai mare este egală cu 15.

În total sunt 13 numere naturale în mulţimea $\{3,4,...,15\}$, cu suma 3+4+...+15= 117. Deci numărul care nu va fi suma a două vârfuri de pe aceeaşi muchie este $117-108=9$.

Avem $15=8+7 \Rightarrow$ numerele 7 şi 8 sunt adiacente; $14=8+6 \Rightarrow$ numerele 6 şi 8 sunt adiacente, deci 6 şi 7 nu sunt adiacente; deci numărul 13 poate fi scris doar $8+5$, deci din vârful cu 8 avem vârfurile adiacente cu 5, 6 şi 7. Observăm astfel că numărul 12 (care poate fi scris doar sub forma 8+4 sau 7+5) nu poate fi scris ca suma a două vârfuri adiacente, deci "lipseşte"12, contradicţie.