Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele prime p şi q astfel încât $\sqrt{p^2+6pq+q^2}$ să fie număr raţional.

Gazeta Matematică

Soluție și barem:

Căutăm numerele prime p şi q, $p<q$, astfel încât $p^2+6pq+q^2$ să fie pătrat perfect. Cazul $p=q$ nu convine deoarece $\sqrt{8p^2}\notin\mathbb{Q}$. **1p**

Avem cazurile:

Caz I: $p=2$ şi $q=3$ este soluţie. **1p**

Caz II: $p=2$ şi $q\geq 5$. Atunci $q=M_3\pm 1$, aşadar $p^2+6pq+q^2=M_3+2\neq$ pătrat perfect **1p**

Caz III: $p=3$. Atunci $9+18q+q^2=t^2$, $t\in\mathbb{N}$, deci $[(q+9)-t][(q+9)+t]=72$, ambii factori fiind numere pare. Găsim $q\in\{0,2,10\}$, dar q trebuie să fie număr prim mai mare decât p. În acest caz nu avem soluţii. **2p**

Cazul IV: $p,q\geq 5$. Atunci $p^2+6pq+q^2=M_3+2\neq$ pătrat perfect. **1p**

Cum expresia de sub radical este simetrică, soluţiile sunt:

$(p,q)\in\{(2,3);(3,2)\}$. **1p**

Clasa a VIII-a

Problema 2. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi punctele $M \in (AB)$, $N \in (CC')$, $P \in (D'A')$ astfel încât $AM = CN = D'P$. Arătaţi că centrul de greutate al triunghiului MNP se află pe segmentul $[B'D]$.

Viitori Olimpici

Soluţie.

Fie G centrul de greutate al triunghiului MNP.

Piramida triunghiulară $DMNP$, cu vârful D, este regulată. **3p**

Aşadar $DG \perp (MNP)$. **1p**

Piramida triunghiulară $B'MNP$, cu vârful B', este regulată. **1p**

Aşadar $B'G \perp (MNP)$. **1p**

Punctele D, G, B' sunt coliniare şi $B'D \perp (MNP)$. Punctul G este în interiorul cubului, deci $G \in [BD']$. **1p**

Clasa a VIII-a

Problema 3. Fie mulţimea de numere naturale $A = \{1, 2, 3, ..., 37\}$ şi S o submulţime a sa, astfel încât oricare două elemente ale lui S au diferenţa diferită de 3 sau 4. Aflaţi cardinalul maxim al submulţimii S.

Felician Preda

Soluţie.

$S = \{1, 2, 3, 8, 9, 10, 15, 16, 17, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 36, 37\}$ este o submulţime de cardinal 17. .... **1p**

Arătăm că 17 este este maximul căutat. **1p**

Oricare ar fi 7 numere naturale consecutive putem alege maxim 3 numere cu proprietatea din enunţ.. **1p**

Fie $X = \{a, a+1, a+2, a+3, a+4, a+5, a+6\}$. Elementele lui X le distribuim în $X_1 = \{a, a + 3\}$, $X_2 = \{a + 1, a + 4\}$, $X_3 = \{a + 2, a + 5\}$, $X_4 = \{a + 6\}$. Din fiecare mulţime alegem maxim un număr. **2p**

Pentru a putea alege, prin absurd, 4 numere respectând cerinţa, trebuie să alegem numărul $a + 6$. Acesta exclude prezenţa în submulţimea căutată a numerelor $a + 2$ şi $a + 3$. În submulţimea căutată vor fi numerele a şi $a + 5$, aşadar din mulţimea X_2 nu am avea niciun număr. **1p**

Împărţim mulţimea A în cinci mulţimi de câte 7 numere consecutive, plus numerele 36 şi 37. În total vom avea cardinalul maxim al submulţimii S numărul $3 \times 5 + 2 = 17$. **1p**