Etapa 5. Problema 1

Arătaţi că există o infinitate de numere naturale n astfel încât:

$$\sqrt{n+\left[\sqrt{n+\frac{1}{4}}\right]} \in \mathbb{Q}.$$

(Am notat cu $[x]$ partea întreagă a numărului real x.)

Etapa 5. Problema 2

(a) Demonstraţi că $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(b) Demonstraţi că dacă $m > n > p > q$ sunt numere prime atunci: $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{q} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Etapa 5. Problema 3

Numim palindrom un număr care citit de la stânga la dreapta şi citit de la dreapta la stânga rămâne neschimbat. De exemplu numărul 5657565 este palindrom. Există vreun număr natural $n \geq 2$ astfel încât numărul $\overline{1234567891011121314...n}$ să fie palindrom?

Etapa 5. Problema 4

Fie $ABCD$ un paralelogram şi O intersecţia diagonalelor. De aceeaşi parte cu A faţă de dreapta BD se construiesc triunghiurile echilaterale ΔODE şi ΔABF echilaterale. Demonstraţi că punctele F, A şi E sunt coliniare dacă şi numai dacă $ABCD$ este dreptunghi.