



Problema 1. Considerăm m și n numere naturale nenule. Determinați:

$$\left[\frac{m\sqrt{2021} + 45n}{m + n} \right] + \left[\frac{45m + n\sqrt{2021}}{m + n} \right].$$

(Am notat $[x]$ partea întreagă a numărului real x .)

Problema 2. Pentru un număr natural $n \in \mathbb{N}^*$ notăm cu $\tau(n)$ numărul divizorilor lui n .

- (a) Demonstrați că $\tau(n) \leq 2[\sqrt{n}]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Aflați toate valorile lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care inegalitatea de la (a) devine egalitate.

Problema 3.

Ana și Bogdan joacă următorul joc cu un pion pe o tablă $1 \times (N + 2)$. La început Ana plasează pionul oriunde pe tablă. La fiecare mutare Bogdan alege un număr natural nenul n . Ana trebuie să mute pionul la stânga sau la dreapta cu n pătrățele. Ana câștigă dacă pionul părăsește tabla iar Bogdan câștigă dacă pionul ajunge într-unul dintre cele două capete. Determinați valorile lui N pentru care Bogdan câștigă într-un număr finit de mutări.



Problema 4. Fie $ABCD$ un pătrat. Pe latura BC se consideră punctul E astfel încât $m(\sphericalangle BAE) = 15^\circ$. În interiorul pătratului se construiește $\triangle CEF$ echilateral.

- Arătați că punctele B, F, D sunt coliniare.
- Aflați $m(\sphericalangle AFD)$.