Problema 1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim

$$a_n = \sqrt{n(n+1)} \text{ şi } A_n = \frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\sqrt{3\cdot 4}+...+\sqrt{n(n+1)}}{n}.$$

a) Aflaţi prima zecimală a numărului a_n.

b) Arătaţi că $0,9 < A_n - \frac{n}{2} < 1$.

Gh. Bumbăcea, Buşteni

Soluţie. a) Pentru $n = 1$ avem $a_1 = \sqrt{2} = 1,4....$ Pentru $n = 2$ avem $a_2 = \sqrt{6} = 2,4....$ Se pare că prima zecimală a lui a_n este 4. Pentru aceasta vom arăta că $n + 0,4 < \sqrt{n(n+1)} < n + 0,5$ (1). Ridicând la pătrat relaţia (1) obţinem $n^2 + 0,8n + 0,16 < n^2 + n < n^2 + n + 0,25$, relaţie evident adevărată. În concluzie, prima zecimală a lui a_n este 4.

b) Sriem relaţia (1) pentru $n = 1; 2; 3....n$ şi apoi le adunăm. Avem $1 + 0,4 < \sqrt{1\cdot 2} < 1 + 0,5$; $2 + 0,4 < \sqrt{2\cdot 3} < 2 + 0,5$; ..., $n + 0,4 < \sqrt{n\cdot(n+1)} < n + 0,5$, de unde $\frac{n(n+1)}{2} + 0,4n < \sqrt{1\cdot 2} + \sqrt{2\cdot 3} + ... + \sqrt{n(n+1)} < \frac{n(n+1)}{2} + 0,5n$ sau $\frac{n+1}{2} + 0,4 < A_n < \frac{n+1}{2} + 0,5$. Din ultima relaţie deducem că $0,9 < A_n - \frac{n}{2} < 1$.

Problema 2. Determinaţi numerele prime x şi y ştiind că $\left[\frac{5x}{2y}\right] = 2x - 3y - 2$, iar $\left\{\frac{5x}{2y}\right\} = \frac{x-2y}{2}$, unde $[a]$ şi $\{a\}$ reprezintă partea întreagă şi respectiv partea fracţionară a numărului real a.

E Blăjuţ, Bacău

Soluţie. Se ştie că $[x] + \{x\} = x$. Adunând relaţiile din enunţ obţinem $\frac{5x}{2y} = \frac{5x-8y-4}{2}$ sau $5x = 5xy - 8y^2 - 4y$, pe care o mai putem scrie $4y(2y+1) = 5x(y-1)$ (1). Din (1) deducem că 5 divide y sau 5 divide $2y+1$. Dacă 5 divide y şi y este număr prim rezultă $y = 5$. Atunci, înlocuind în (1) obţinem $x = 11$. Dacă 5 divide $2y+1$, atunci $2y+1 = 5k$ de unde $y = \frac{5k-1}{2}$ şi $y - 1 = \frac{5k-3}{2}$. Înlocuind în (1) găsim $x = \frac{20k^2-4k}{5k-3}$. Deoarece x este număr natural trebuie ca $5k-3$ să dividă $20k^2-4k$. Cum $5k-3$ divide $5k-3$ rezultă $5k-3$ divide $20k^2-4k-4(5k-3)$, adică $5k-3$ divide $8k$. Acum, din $5k-3$ divide $5k-3$ şi $5k-3$ divide $8k$ obţinem $5k-3$ divide $5\cdot 8k - 8(5k-3)$, adică $5k-3$ divide 24. Deducem $5k-3 \in \{1;2;3;4;6;8;12;24\}$, de unde $k \in \{1;3\}$. Deoarece pentru $k \in \{1;3\}$ obţinem $x \in \{8;14\}$ care nu sunt numere prime, rezultă că singura soluţie este $x = 11; y = 5$.

Problema 3. Fie x, y, z, t numere reale pozitive. Arătaţi că

$$\sqrt{\frac{x}{y+z+t}}+\sqrt{\frac{y}{z+t+x}}+\sqrt{\frac{z}{t+x+y}}+\sqrt{\frac{t}{x+y+z}}>2.$$

Monica Sas, Bistriţa, Bistriţa-Năsăud

Soluţie. Aplicăm inegalitatea mediilor ($M_g \leq M_a$) pentru numerele $\frac{y+z+t}{x}$ şi 1 şi obţinem $\sqrt{\frac{y+z+t}{x}\cdot 1} \leq \frac{\frac{y+z+t}{x}+1}{2}$, de unde $\sqrt{\frac{x}{y+z+t}} \geq \frac{2x}{x+y+z+t}$.

Analog obţinem

$$\sqrt{\frac{y}{z+t+x}} \geq \frac{2y}{x+y+z+t}$$

$$\sqrt{\frac{z}{t+x+y}} \geq \frac{2z}{x+y+z+t}$$

şi

$$\sqrt{\frac{t}{x+y+z}} \geq \frac{2t}{x+y+z+t}$$

Adunând cele patru relaţii obţinem inegalitatea din enunţ.

Problema 4. În triunghiul ABC bisectoarea AM, $M \in (BC)$ şi mediana BN, $N \in (AC)$ se intersectează în punctul D astfel încât $AD = BC$, iar $CD \cap AB = \{P\}$. Arătaţi că $\dfrac{AM}{BM} - \dfrac{AP}{BP} = 2$.

Ştefan Smarandache, *Bucureşti*

Soluţie. Notăm $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Din teorema bisectoarei în $\triangle ABC$ obţinem $BM = \dfrac{ac}{b+c}$. Cu teorema lui Menelaus în $\triangle AMC$ pentru transversala BDN, ţinând cont de faptul că $\dfrac{NC}{NA} = 1$, rezultă $DM = BM$ şi atunci $AM = \dfrac{a(b+2c)}{b+c}$. În sfârşit, din teorema lui Ceva în $\triangle ABC$ pentru cevienele concurente AM, BN, CP deducem $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{b}{c}$. Cu acestea $\dfrac{AM}{BM} - \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{a(b+2c)}{ac} - \dfrac{b}{c} = 2$.