Problema 1. Considerăm punctul P în interiorul triunghiului oarecare ABC astfel încât P nu se află pe nicio mediană. Paralela prin B la CP intersectează paralela prin C la PB în punctul D. Paralela prin A la CP intersectează paralela prin C la PA în punctul E. Paralela prin B la AP intersectează paralela prin A la PB în punctul F. Arătați că ΔAPD, ΔBPE și ΔCPF au același centru de greutate.

Soluție.

Deducem din ipoteză că $BPCP$ este paralelogram deci diagonalele BC și PD au același mijloc M. Prin urmare, AM este mediană comună triunghiurilor ABC și APD. Fie G centrul de greutatea la triunghiului ABC. Obținem că G este și centrul de greutate al triunghiului APD. Analog, G este și centrul de greutate al triunghiurilor BPE și CPF.

Problema 2. Determinați numerele raționale a, b și c astfel încât $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}+c\sqrt{7}=0$.

Soluție.

Rescriem relația $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}=-c\sqrt{7}$, și ridicăm la pătrat. Obținem $2ab\sqrt{15}=7c^2-3a-5b\in\mathbb{Q}$. Obținem după analiza cazurilor $a=b=c=0$.

Problema 3. Arătați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât $2n$ să fie pătrat perfect, $3n$ să fie cub perfect și $5n$ să fie puterea a 5-a a unui număr natural.

Soluție. Căutăm numere n de forma $2^a 3^b 5^c$; a trebuie să fie $M_2 + 1$, M_3 și M_5 adică echivalent $M_{30} + 15$; b trebuie să fie M_2, $M_3 + 2$ și M_5 adică echivalent $M_{30} + 20$; c trebuie să fie M_2, M_3 și $M_5 + 4$ adică echivalent $M_{30} + 24$. Evident obținem o infinitate de numere n cu condițiile cerute.

Problema 4. Două cutii conțin 65 de bile de câteva mărimi diferite. Bilele sunt de patru culori. Printre oricare 5 bile de aceeași culoare există 2 de aceeași mărime. Demonstrați că există cel puțin trei bile conținute în aceeași cutie care au aceeași culoare și aceeași mărime.

Soluție.

Vom folosi în mod repetat principiul cutiei. În primul rând exită o cutie cu 33 de bile. În acea cutie avem cel puțin 9 bile de aceeași culoare. Presupunem prin reducere la absurd că avem maxim două bile de aceeași mărime, rezultă că avem bile de 5 mărimi diferite ceea ce contrazice ipoteza.