Clasa a VII-a

Problema 1. Numim palindrom un număr care citit de la stânga la dreapta şi citit de la dreapta la stânga rămâne neschimbat. De exemplu 5678765 este un palindrom, iar 23455234 nu este palindrom. Există vreun număr natural $n \geq 2$ astfel încât numărul $\overline{1234567891011121314\ldots}$ să fie palindrom ?

Viitori Olimpici 2021

Soluţie și barem: Presupunem că există n astfel încât $N = \overline{1234\ldots n}$ să fie palindrom. Atunci ultima cifră a lui n este 1, deci n nu este putere a lui 10.

Fie $n = a \cdot 10^k + b$, cu $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ şi $1 \leq b < 10^k$. Atunci în N apare secvenţa $S = 100\ldots01$, cu k cifre de 0.

Observăm că această secvenţă nu poate să apară decât o dată, deoarece k este numărul maxim de 0-uri consecutive, iar grupul cu k 0-uri consecutive este delimitat de două cifre 1 doar într-un singur caz............................**3p**

Dacă S este situată în întregime înainte sau după ,,mijlocul” lui N, atunci, cum ea nu se repetă, N nu poate fi palindrom..............................**2p**

Dacă ,,mijlocul” lui N se suprapune peste S, atunci, pentru ca N să poată fi palindrom, ar trebui ca ,,mijlocul” lui S să coincidă cu ,,mijlocul” lui N. În acest caz, ultima cifră înaintea lui S este 9, pe când prima cifră după S este 0, deci nici în acest caz nu convine..**2p**

Clasa a VII-a

Problema 2. Se consideră numerele $1+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$. Dupa un pas, fiecare număr se înlocuieşte cu media armonică a celorlalte numere.

a) Este posibil ca, după un anumit număr de paşi, numerele obţinute să fie $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ şi $1+\sqrt{3}$?

b) Este posibil ca, după un anumit număr de paşi, numerele obţinute să fie 2, 3 şi 6?

Gazeta Matematică 2021

Prima soluție:

a) Fie a_n, b_n, c_n numerele după n paşi şi $S_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}$. Avem $S_{n+1} = S_n = \ldots = S_0 = 1$ **2p**

Cum $\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{3}} \neq 1$, rezultă că nu putem avea la un moment dat numerele $2+\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$ **2p**

b) Presupunem că din a, b, c, putem obţine $2, 3, 6$.

Atunci $2 = \frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \in \mathbb{Q}$. La fel, $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \in \mathbb{Q}$ şi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$. Se obţine, astfel, că $a, b, c \in Q$.

Procedăm similar pentru numerele din care se obţin a, b, c, ş.a.m.d. Rezultă că la început, toate numerele sunt raţionale – contradicţie **3p**

A doua soluție:

a) Dacă $a_n < b_n < c_n$ sunt numerele după n pași, atunci mediile armonice $a_{n+1},\ b_{n+1},\ c_{n+1}$sunt cuprinse între a_n și c_n **1p**

După primul pas obținem numerele $1+\sqrt{3} < 1+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} < 2+\sqrt{2}$, iar $1+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \neq \sqrt{2}+\sqrt{3}$ **1p**

Apoi obținem numere mai mari decât $1+\sqrt{3}$ și mai mici decât $2+\sqrt{2}$ deci nu putem obține numerele cerute **2p**

b) Din raționamentul de la a) reiese că obținem doar numere cuprinse între $1+\sqrt{2}$ și $2+\sqrt{3}$, deci nu-l putem obține pe 6 . . . . **3p**

Observație. În enunțul primit în concurs, la întrebarea a), în locul numerelor $2+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3}$ au apărut tot numerele $1+\sqrt{2},\ \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}$. În cazul în care un concurent spune că răspunsul este afirmativ, deoarece numerele cerute se obțin după 0 pași, sau spune că răspunsul este negativ, argumentând acest lucru(de exemplu, cu un raționament de tipul celui din soluția II), va lua **4p** pentru această parte a problemei.

Clasa a VII-a

Problema 3. Fie $ABCD$ un trapez înscris în centrul de centru O, $DC \parallel AB$ şi $DC < AB$. Notăm cu T intersecţia dreptelor AD şi BC. Dreapta TO intersectează arcul mic DC în M şi diagonala AC în E. Arătaţi că

a) $\triangle TCE \sim \triangle BOE$;

b) $\dfrac{TM}{OM} = \dfrac{ME}{OE}$.

Traian Preda

Soluție:

a) $ABCD$ este trapez isoscel $\implies T, M, E, O$ sunt coliniare. M este mijlocul arcului $DC \implies AM$ este bisectoarea $\angle DAC$. Deoarece TM este bisectoarea $\angle ATB$, M este centrul cercului inscris triunghiului TAC. Astfel CM este bisectoarea $\angle TCA$. De aici $\angle TEC \equiv \angle AEO \equiv \angle BEO$ **2p**

Dar $m(\angle EOB) = m(\overset{\frown}{MB}) = m(\overset{\frown}{MA}) = 2 \cdot m(\angle ACM) = m(\angle ACT) = m(\angle ECT)$. Astfel $\triangle TCE \sim \triangle BOE (U.U.)$ **2p**

b) Din $\triangle TCE \sim \triangle BOE$ (U.U.) obţinem:
$\dfrac{TC}{BO} = \dfrac{CE}{OE} = \dfrac{ET}{EB}$, deci $\dfrac{TC}{CE} = \dfrac{BO}{OE}$ **1p**
Aplicăm teorema bisectoarei in $\triangle TCE$
$\dfrac{TM}{ME} = \dfrac{TC}{CE} = \dfrac{BO}{OE} = \dfrac{MO}{OE} \implies \dfrac{TM}{MO} = \dfrac{ME}{EO}$ **2p**