Probl. săptămânii 262.

$a, b, c > 0$ cu $abc = 1 \Rightarrow \sum_{cyc} \dfrac{a+3}{(a+1)^2} \geq 3.$ $(*)$

Soluție.

$$(*) \Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a+1}{(a+1)^2} + \frac{2}{(a+1)^2}\right) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{a+1} + 2\sum_{cyc} \frac{1}{(a+1)^2} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2}{a+1} + \sum_{cyc}\left(\frac{2}{a+1}\right)^2 \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\left(\frac{2}{a+1}\right)^2 + \frac{2}{a+1} - 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{2}{a+1} - 1\right)\left(\frac{2}{a+1} + 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1-a}{1+a} \cdot \left(\frac{1-a}{1+a} + 3\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2 + 3\sum_{cyc} \frac{1-a}{1+a} \geq 0 \qquad (**)$$

Dar $\prod(1-a) = 1 - \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab - abc \leq 1 + \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab + abc$

$= \prod(1+a) \Rightarrow \prod \dfrac{1-a}{1+a} \leq 1$

$\Rightarrow \left(\prod \dfrac{1-a}{1+a}\right)^{1/3} \leq 1 \Rightarrow \prod \dfrac{1-a}{1+a} \leq \left(\prod \dfrac{1-a}{1+a}\right)^{2/3}$

$\Rightarrow 3\prod \dfrac{1-a}{1+a} \leq 3\left(\prod \dfrac{1-a}{1+a}\right)^{2/3} = 3\sqrt[3]{\prod\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2}$

$\underset{\text{AM-GM}}{\leq} \sum_{cyc}\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^2$, iar $(**)$ se reduce la

$$3\prod \frac{1-a}{1+a} + 3\sum_{cyc} \frac{1-a}{1+a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \prod \frac{1-a}{1+a} + \sum_{cyc} \frac{1-a}{1+a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\prod(1-a) + \sum_{cyc}(1-a)(1+b)(1+c)}{\prod(1+a)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \prod(1-a) + \sum_{cyc}(1-a)(1+b)(1+c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab - abc + \sum_{cyc} (1+b+c+bc-a-ab-ac-abc) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab - abc\right) + 3 + \sum_{cyc} a - \sum_{cyc} ab - 3abc \geq 0$$

$\Leftrightarrow 4 - 4abc \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 4abc \Leftrightarrow 1 \geq abc \Leftrightarrow 1 \geq 1$, adevărat.

Egalitate avem $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

În concluzie: $$\sum_{cyc} \frac{a+3}{(a+1)^2} \geq 3.$$

Remarcă: Nu era necesar ca $abc = 1$.
Este suficient să avem $abc \leq 1$.