Problema săptămânii 263

Arătaţi că ecuaţia
$$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)+5=0$$
nu are soluţii în mulţimea numerelor raţionale.

Olimpiadă Bulgaria, 1997

Soluţie: Înmulţind cu 4, ecuaţia revine la $(2x+3)^2+(2y+3)^2+(2z+3)^2=7$ sau, notând $u=2x+3$, $v=2y+3$, $w=2z+3$, $u,v,w\in\mathbb{Q}$, la $u^2+v^2+w^2=7$. Dacă d este un numitor comun al fracţiilor u,v,w, iar $u=\frac{a}{d}$, $v=\frac{b}{d}$, $w=\frac{c}{d}$, avem de arătat că ecuaţia $a^2+b^2+c^2=7d^2$ nu are soluţii întregi cu $d>0$.
Presupunând că o asemenea soluţie există, considerăm una pentru care $d>0$ este minim. Modulo 8 se vede că egalitatea $a^2+b^2+c^2=7d^2$ poate avea loc numai dacă a,b,c,d sunt pare. Dar atunci şi $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2},\frac{d}{2})$ este soluţie a ecuaţiei cu $0<\frac{d}{2}<d$, ceea ce contrazice minimalitatea alegerii. Aşadar, ecuaţia $a^2+b^2+c^2=7d^2$ nu are soluţii întregi cu $d\neq 0$, prin urmare ecuaţia din enunţ nu are soluţii raţionale.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Corneliu Mănescu-Avram, Emanuel Mazăre* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 263

Prove that the equation
$$x^2+y^2+z^2+3(x+y+z)+5=0$$
has no solution in rational numbers.

Bulgarian Olympiad, 1997

Solution: Multiplying by 4, the equation becomes $(2x+3)^2+(2y+3)^2+(2z+3)^2=7$ or, putting $u=2x+3$, $v=2y+3$, $w=2z+3$, $u,v,w\in\mathbb{Q}$, it reduces to $u^2+v^2+w^2=7$. If d is a common denominator of u,v,w, and $u=\frac{a}{d}$, $v=\frac{b}{d}$, $w=\frac{c}{d}$, we wish to prove that the equation $a^2+b^2+c^2=7d^2$ has no integer solutions with $d>0$.
Assuming such a solution does exist, consider one for which $d>0$ is minimal. Modulo 8 one can see that the equality $a^2+b^2+c^2=7d^2$ can only take place if a,b,c,d are even. But then $(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{c}{2},\frac{d}{2})$ is also a solution to the equation, a solution with $0<\frac{d}{2}<d$, which contradicts the choice of our solution as being the one with minimal d. Thus, the equation $a^2+b^2+c^2=7d^2$ has no integer solutions with $d\neq 0$, which means that the equation in the statement has no rational solutions.