Problema săptămânii 261

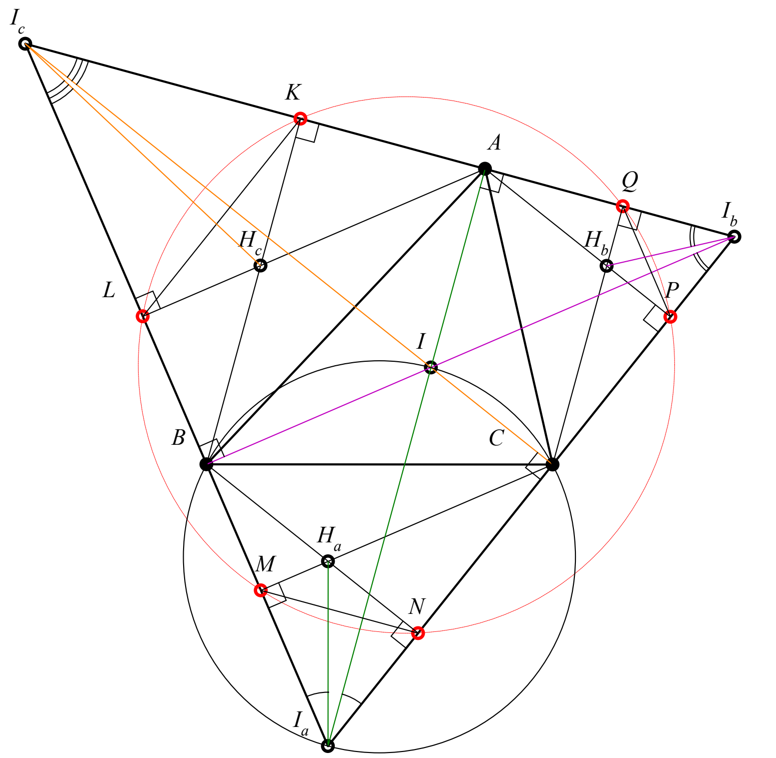
Fie ABC un triunghi, k, ℓ şi m dreptele suport ale bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B, respectiv C. Proiecţiile lui A pe ℓ şi m sunt L, respectiv P. Analog, proiecţiile lui B pe m şi k sunt N şi K, iar proiecţiile lui C pe k şi ℓ sunt Q şi M. Arătaţi că punctele M, N, P, Q, K şi L sunt conciclice.

Borislav Mirchev şi Leonard Giugiuc, Crux Mathematicorum, pb.4464

Soluţia 1: (*David Ghibu*)
Fie $\{I_A\} = m \cap \ell$, $\{I_B\} = k \cap m$ şi $\{I_C\} = \ell \cap k$ centrele cercurilor exînscrise triunghiului ABC. Atunci $(AI_A$, $(BI_B$ şi $(CI_C$ sunt bisectoarele interioare ale triunghiului ABC. Ele se intersectează în I care este şi ortocentrul triunghiului $I_AI_BI_C$.
Patrulaterele $ABLK$, I_CMCQ şi ABI_AI_B fiind inscriptibile, avem

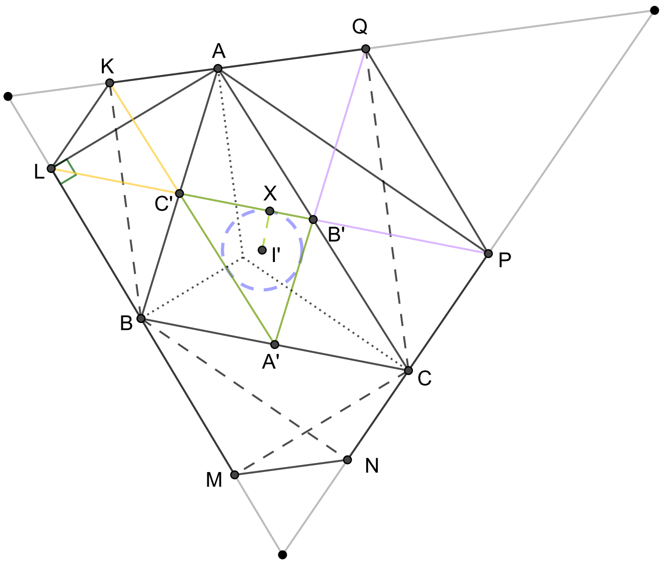
$$\sphericalangle I_CLK \equiv \sphericalangle I_CAB \equiv \sphericalangle BI_AI_B \equiv \sphericalangle I_CCM \equiv \sphericalangle I_CQM,$$

deci patrulaterul $KLMQ$ este inscriptibil.[1] Analog, patrulaterele $MNPL$ şi $PQKN$ sunt şi ele inscriptibile.
Dacă cercurile circumscrise acestor trei patrulatere ar fi distincte, axele lor radicale ar fi paralele sau concurente. Dar acestea sunt LM, KQ şi NP şi nu sunt nici paralele, nici concurente. Aşadar, cel puţin două dintre cercuri coincid, ceea ce arată că cele şase puncte sunt conciclice.



[1] Acest lucru se putea justifica mai rapid folosind faptul că semidreptele $(I_CC$ şi $(I_CH_C$ sunt izogonale, deci proiecţiile punctelor C şi H_C pe laturile unghiului determină patru puncte conciclice; vezi Aplicaţia 7 din materialul Patrulatere inscriptibile de Mihai Miculiţa (geometrie, articole teorie).

Soluţia 2:
Trapezul $BCQK$ este dreptunghic, deci mediatoarea segmentului $[KQ]$ este linia mijlocie a trapezului. Ea este paralelă cu AI şi trece prin mijlocul lui $[BC]$, deci este bisectoare în triunghiul median al lui ABC. Astfel, mediatoarele segmentelor $[KQ]$, $[LM]$ şi $[NP]$ sunt concurente în centrul cercului înscris în triunghiul median al lui ABC (centrul lui Spieker al triunghiului ABC - vezi materialul teoretic despre teorema bisectoarei glisante). Rămâne să arătăm că acest punct este egal depărtat de cele şase puncte. Fie A', B', C' mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, respectiv $[AB]$, I' centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$ şi X, Y punctele de tangenţă ale cercului înscris cu laturile $B'C'$, respectiv $A'C'$. Este suficient să demonstrăm că $I'K = I'L$ (analog rezultă că I' se află şi pe mediatoarele segmentelor $[MN]$ şi $[PQ]$. Se ştie că proiecţia lui B pe bisectoarea (interioară sau exterioară) a unghiului A se află pe linia mijlocie $A'C'$. (Dacă $\{T\} = AC \cap BK$, atunci $[AK]$ este înălţime şi bisectoare în triunghiul BCT, deci este şi mediană.) Aşadar, $K \in A'C'$ şi $L \in B'C'$. În plus, $C'K = C'L (= C'A = C'B)$ şi $C'X = C'Y$ (tangente) implică $LX = KY$. Triunghiurile $I'XL$ şi $I'YK$ sunt congruente (CC), deci ipotenuzele $I'K$ şi $I'L$ sunt congruente.



Remarcă: (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Luând triunghiul antisuplementar ca triunghi de bază, obţinem enunţul: Proiecţiile picioarelor înălţimilor unui triunghi pe laturile adiacente sunt şase puncte pe un cerc. Acest fapt este cunoscut, iar cercul respectiv este cercul lui Taylor. Cum triunghiul dat este triunghiul ortic al triunghiului antisuplementar, rezultă că centrul cercului lui Taylor al triunghiului antisuplementar este punctul Spieker al triunghiului dat. Mai multe despre cercul Taylor puteţi citi aici.

Puteţi citi şi soluţia (în limba engleză) apărută în Crux no. 2/2020, la pagina 41.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Andrei Pană, Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre* şi *Tashi Diaconescu.*

Problem of the week no. 261

Let ABC be a triangle with external angle bisectors k, ℓ and m to angles A, B and C, respectively. Projections of A on ℓ and m are L and P, respectively. Similarly, projections of B on m and k are N and K and projections of C on k and ℓ are Q and M. Show that the points M, N, P, Q, K and L are concyclic.

Borislav Mirchev and Leonard Giugiuc, Crux Mathematicorum, pb.4464

You can read the solution from Crux no. 2/2020 on page 41.