

### Problema săptămânii 260

Se dau 2021 de mingi dispuse într-un rând. Pasha și Vova joacă un joc în care cei doi mută alternativ. Pasha începe. La o mutare, jucătorul aflat la rând trebuie să coloreze una dintre mingile necolorate cu una din culorile roșu, galben sau verde. (Inițial toate mingile sunt necolorate.) Jocul se încheie atunci când au fost colorate toate mingile. Pasha câștigă dacă există trei mingi consecutive colorate cu trei culori diferite; în caz contrar câștigă Vova. Care din cei doi jucători are strategie câștigătoare?

*S. Luchinin Olimpiada Caucasus, 2021*

**Soluție:** Pasha are strategie câștigătoare.

Sunt mai multe strategii posibile pentru Pasha. Observația cheie este următoarea: dacă Pasha realizează un grup de patru mingi consecutive în care cele două mingi din margine au culori diferite, iar cele două din mijloc sunt necolorate, el câștigă așteptând ca Vova să coloreze una din mingile din mijloc, urmând ca el să coloreze imediat cealaltă minge din mijloc. Pasha are ultima mutare, deci el îl poate forța pe Vova să coloreze el primul una din cele două mingi din mijlocul grupului de patru. Partea cu culorile este ușor de înțeles: dacă avem succesiunea  $c_1 n_1 n_2 c_2$  ( $c_1$  și  $c_2$  sunt mingi colorate cu culoarea  $c_1$ , respectiv  $c_2$ , iar  $n_1$  și  $n_2$  sunt mingi necolorate), datorită simetriei putem presupune că Vova colorează mingea  $n_1$ . Dacă nu o colorează cu  $c_1$ , Pasha colorează  $n_2$  astfel încât mingile  $c_1$ ,  $n_1$  și  $n_2$  să capete 3 culori diferite, iar dacă o colorează cu  $c_1$ , Pasha colorează mingea  $n_2$  astfel încât mingile  $n_1$ ,  $n_2$  și  $c_2$  să capete 3 culori diferite.

În fine, să mai observăm că Pasha poate realiza cu ușurință un asemenea grup: de exemplu, el colorează cu roșu mingea a patra. Dacă Vova n-a colorat niciuna din primele trei mingi, Pasha colorează cu galben prima minge. Grupul dorit de Pasha este cel format din primele patru mingi. Dacă Vova a colorat una din primele trei mingi, Pasha colorează cu galben mingea a șaptea. Grupul dorit de Pasha este cel format din mingile 4 – 5 – 6 – 7.

**Problema generală:** Cine câștigă jocul în cazul a  $n$  mingi?

Se arată la fel că dacă  $n \geq 7$  este impar, Pasha câștigă.

Dacă  $n$  este par, câștigă Vova: el grupează mingile în perechi (primele două, următoarele două, etc); dacă Pasha colorează cu o anumită culoare o minge dintr-o pereche, Vova colorează cu aceeași culoare cealaltă minge din respectiva pereche. Astfel, fiecare grup de trei mingi consecutive va conține o pereche completă, adică două mingi de aceeași culoare.

Dacă  $n = 3$  este clar că Vova câștigă colorând o minge cu aceeași culoare cu care Pasha a colorat prima minge.

Pentru  $n = 5$  câștigă Pasha. O posibilă strategie: el colorează cu roșu prima minge. Dacă Vova colorează ultima minge, Pasha poate colora cu galben penultima minge și obține grupul de patru bile consecutive care îi asigură victoria în problema originală. Dacă Vova colorează cu o culoare mingea 3 sau mingea 4, Pasha colorează cu o altă culoare mingea 4, respectiv mingea 3, amenințând la două capete să obțină

trei mingi cu culori diferite. Rămâne că Vova trebuie să coloreze mingea 2. Atunci Pasha colorează mingea 5 cu o culoare diferită de cea folosită de Vova și realizează din nou grupul de patru mingi câștigător.

Am primit soluții de la: *David Ghibu, Ștefan Gobej, Emanuel Mazăre, Tashi Diaconescu, Lucian Maran și Corneliu Mănescu-Avram.*

**Problem of the week no. 260**

A row of 2021 balls is given. Pasha and Vova play a game, taking turns to perform moves; Pasha begins. On each turn a boy should paint a non-painted ball in one of the three available colors: red, yellow, or green (initially all balls are non-painted). When all the balls are colored, Pasha wins, if there are three consecutive balls of different colors; otherwise Vova wins. Who has a winning strategy?

*S. Luchinin* Caucasus Mathematical Olympiad, 2021

**Solution:** The official solution can be found here (problem 6).