Problema săptămânii 259

Fie n un număr natural nenul. Fiecare din numerele $1, 2, \ldots, 1000$ a fost colorat cu una din n culori astfel încât oricare ar fi două numere diferite, dacă unul îl divide pe celălalt, atunci ele sunt colorate cu culori diferite. Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a lui n.

Olimpiadă juniori Polonia, 2018

Soluţie: Numărul minim de culori este 10.
Numerele $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$ trebuie colorate cu 10 culori diferite, în caz contrar am avea două numere diferite de aceeaşi culoare, iar numărul mai mic divide numărul mai mare. Aşadar, avem nevoie de cel puţin 10 culori.
În continuare arătăm că 10 culori sunt suficiente. Este suficient să dăm un exemplu de mod de a colora cele 1000 de numere astfel încât să fie respectată condiţia din enunţ. O posibilă colorare este următoarea:
colorăm numărul 1 cu culoarea 1 (oricum s-ar face colorarea, culoarea folosită la numărul 1 nu poate fi refolosită); colorăm numerele 2 şi 3 cu culoarea 2, numerele 4, 5, 6 şi 7 cu culoarea 3 şi în general, numerele 2^k, $2^k + 1, \ldots,$ $2^{k+1} - 1$ cu culoarea $k + 1$ ($k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$). Numerele $512, 513, \ldots, 1000$ vor fi colorate cu culoarea 10.
Astfel, dacă două numere diferite, $a < b$, au aceeaşi culoare atunci $1 < \frac{b}{a} < 2$, deci a nu divide b.

Remarcă: O altă colorare, propusă de *Ovidiu Lazăr, David Ghibu, Emanuel Mazăre* şi *Tashi Diaconescu* este următoarea:
colorăm numărul 1 cu culoarea 1 şi, în rest, numărul n având descompunerea în factori primi $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$ cu culoarea $k + 1$, unde $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. (Aşadar k este de fapt numărul factorilor primi, nu neapărat distincţi, din descompunerea în factori a numărului.) Să observăm că $n < 2^{10}$ arată că orice număr mai mic decât 1024 are cel mult 9 factori primi în descompunerea sa în factori primi şi că, dacă două numere diferite au aceeaşi culoare, adică acelaşi număr de factori primi în descompunere, atunci nu este posibil ca unul dintre ele să-l dividă pe celălalt.

Am primit soluţii de la: *Elisa Ipate, Ovidiu Lazăr, David Ghibu, Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre* şi *Tashi Diaconescu.*

Problem of the week no. 259

Let n be a positive integer. Each number $1, 2, \ldots, 1000$ has been colored with one of n colours. Each two numbers, such that one is a divisor of second of them, are colored with different colours. Determine minimal number n for which it is possible.

Polish Junior Math Olympiad, final round, 2018

Solution: The minimal number of colors is 10.
Numbers $1, 2, 2^2, \ldots, 2^9$ must be colored with 10 different colors, otherwise one would

have two different numbers of the same color, one being a divisor of the other. Thus, we need at least 10 colors.
Next, we show that 10 colors are sufficient. We shall indicate a way of coloring the first 1000 positive integers that satisfies the conditions in the statement of the problem. One such coloing is the following one:
color number 1 with color no. 1 (in any way one colors, the number 1 gets a number on its own); color numbers 2 and 3 with color no. 2, numbers 4, 5, 6 and 7 with color no. 3 and generally, numbers 2^k, $2^k+1, \ldots, 2^{k+1}-1$ with color no. $k+1$ ($k \in \{1, 2, \ldots, 8\}$). Numbers $512, 513, \ldots, 1000$ get color no. 10.
Thus, if two distinct numbers, $a < b$, have the same color, then $1 < \dfrac{b}{a} < 2$, which means that a does not divide b.

Remark: Another way of coloring, proposed independently by *Ovidiu Lazăr, David Ghibu, Emanuel Mazăre* and *Tashi Diaconescu* is the following one:
color number 1 with color number no. 1 and, otherwise, a number n whose prime factorization is $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$ with color no. $k+1$, where $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. (In other words, k is actually the number of prime factor, not necessarily distinct, in the prime factorization of the number.) As $n < 2^{10}$, each positive integer less than 1024 has at most 9 primes in its prime factorization. Also, if two distinct integers have the same color, i.e. the same of primes in their prime factorization, then it is not possible for one of them to divide the other one.