Problema săptămânii 261:

Fie ABC un triunghi, k, l şi $m-$dreptele suport ale bisectoarelor exterioare ale unghiurilor A, B şi respectiv C. Proiecţiile lui A pe l şi m sunt L şi respectiv P. Analog, proiectiile lui B pe m şi k sunt N şi K; iar proiecţiile lui C pe k şi l sunt Q şi M. Arătaţi că punctele M, N, P, Q, K şi $L-$sunt şase puncte conciclice.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $I-$punctul de intersecţie al bisectoarelor interioare ale ΔABC şi cu: $\{A'\};=l\cap m, \{B'\}:=k\cap m$ şi $\{C'\}:=k\cap l$ (v.Fig.1), întrucât bisectoarea interioară şi bisectoara exterioară a oricărui unghi sunt perpendiculare între ele, avem:

$$IA\perp B'C', IB\perp A'C' \text{ şi } IC\perp A'B'. \quad (1)$$

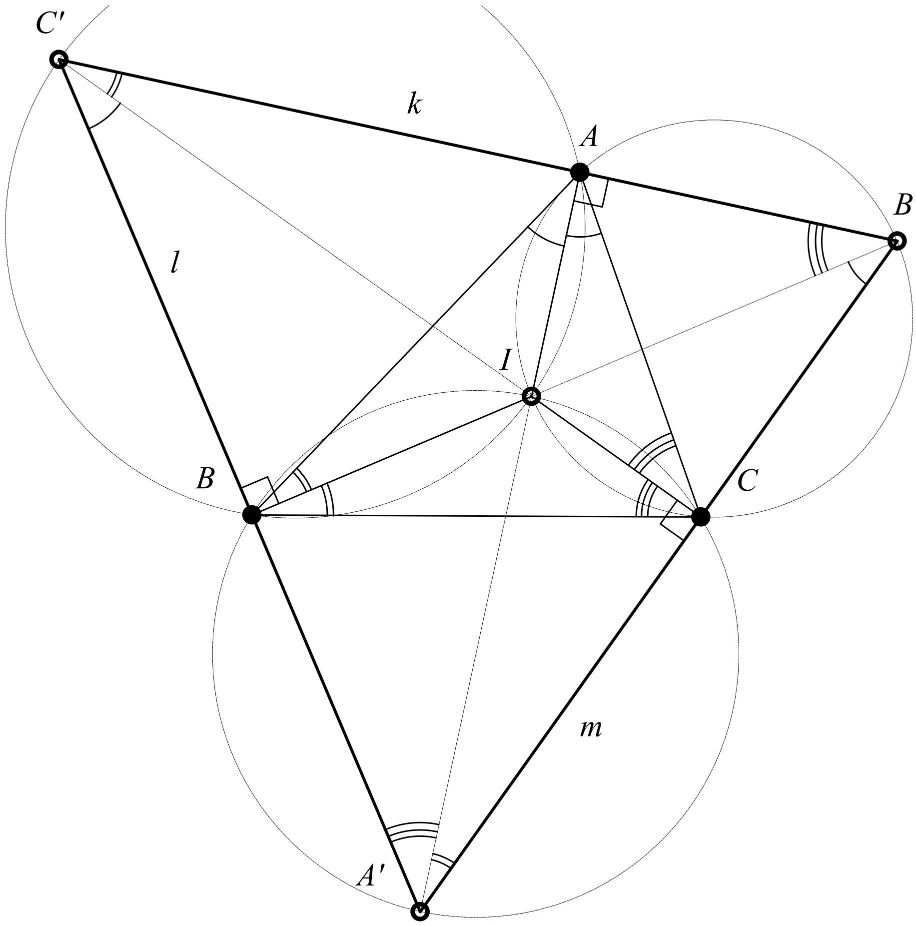

Fig.1.

Notând acum cu:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha:=m\left(\widehat{IAB}\right)=m\left(\widehat{IAC}\right)\\ \beta:=m\left(\widehat{IBA}\right)=m\left(\widehat{IBC}\right)\\ \gamma:=m\left(\widehat{ICA}\right)=m\left(\widehat{ICB}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow 180^0=m\left(\widehat{CAB}\right)+m\left(\widehat{ABC}\right)+m\left(\widehat{BCA}\right)=2\alpha+2\beta+2\gamma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha+\beta+\gamma=90^0. \quad (2)$$

Voi arăta mai întâi că, punctul I (centrul cercului înscris al ΔABC), este ortocentrul $\Delta A'B'C'$. Într-adevăr, din:

$$IC\perp A'C\Rightarrow\boxed{m\left(\widehat{CIA'}\right)}=90^0-m\left(\widehat{IA'C}\right)=90^0-\beta\overset{(2)}{=}\alpha+\beta=\boxed{m\left(\widehat{CAI}\right)+m\left(\widehat{ICA}\right)}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\widehat{CIA'}-\text{este un unghi exterior al }\Delta ICA\Rightarrow A'\in IA\\ IA\perp B'C'\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{I\in AA'\perp B'C'}.$$

În mod analog arătăm, că: $I\in BB'\perp A'C'$ şi $I\in CC'\perp A'B'$. Aşa că, punctul $I\in AA'\cap BB'\cap CC'$, este ortocentrul $\Delta A'B'C'$.

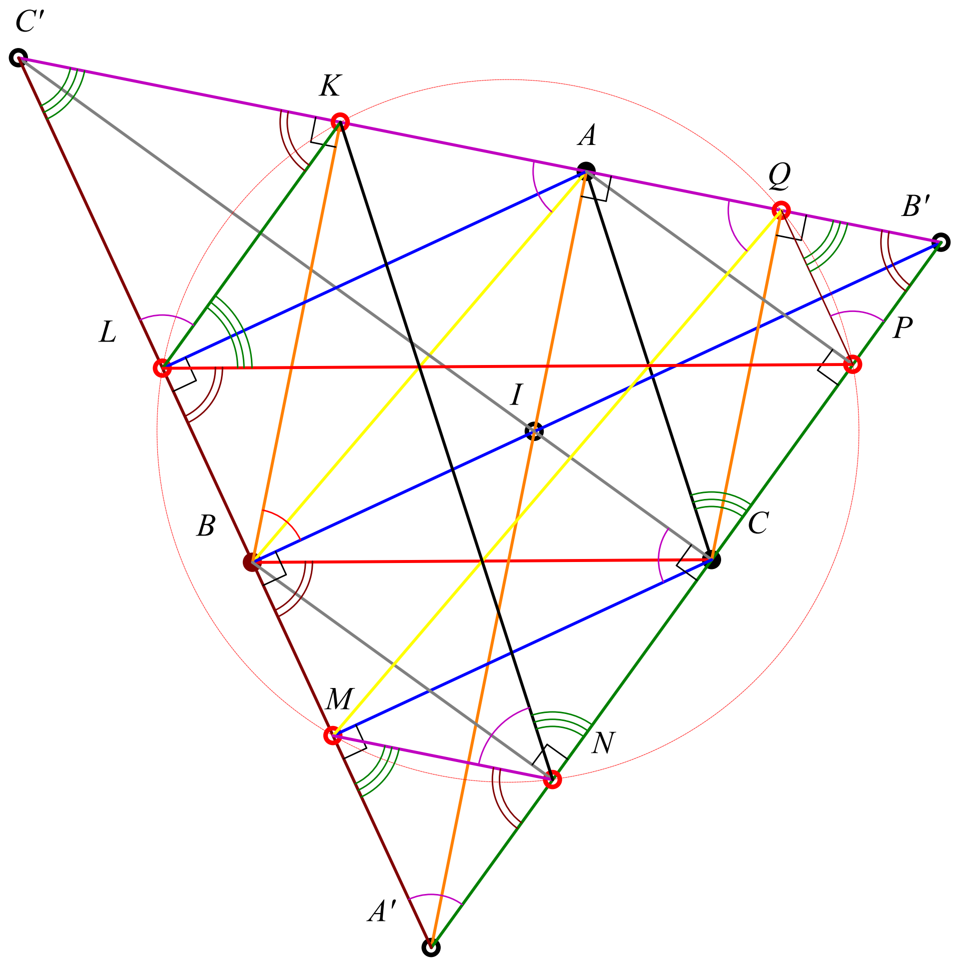

Fig.2.

Voi arăta acum că patrulaterul $KLMQ -$ este inscriptibil.

Într-adevăr, din (v.Fig.2):

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AL \perp A'C' \\ BK \perp B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow AKLB - inscriptibil \Rightarrow \widehat{C'LK} \equiv \underline{\widehat{BAC'}} \\ \left.\begin{array}{l} A'A \perp B'C' \\ B'B \perp A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B'AB - inscriptibil \Rightarrow \underline{\widehat{BAC'}} \equiv \widehat{C'A'B'} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{C'LK} \equiv \widehat{C'A'B'} \quad (3)$$

şi aplicând acum teorema catetei, în triunghiurile $A'CC'$ şi $B'CC'$, obţinem că:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} CC' \perp A'B' \\ CQ \perp B'C' \end{array}\right\} \Rightarrow |C'Q| \cdot |C'B'| = |CC'|^2 \\ \left.\begin{array}{l} CC' \perp A'B' \\ CM \perp A'C' \end{array}\right\} \Rightarrow |C'M| \cdot |C'A'| = |CC'|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow |C'Q| \cdot |C'B'| = |C'M| \cdot |C'A'| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{|C'B'|}{|C'M|} = \dfrac{|C'A'|}{|C'Q|} \\ \widehat{QC'M} = \widehat{B'C'A'} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta A'C'B' \sim \Delta QC'M \Rightarrow \underline{\underline{\widehat{C'A'B'}}} \equiv \widehat{C'QM}; \quad (4)$$

iar din relaţiile (3) şi (4) $\Rightarrow \widehat{C'LK} \equiv \widehat{C'QM} \Rightarrow \boxed{KLMQ - inscriptibil}$. (5)

Observaţii:

1). Din: $\widehat{C'LK} \equiv \widehat{C'A'B'}$ (3) $\Rightarrow LK \parallel A'B'$; **2).** iar din: $\widehat{C'A'B'} \equiv \widehat{C'QM}$ (4) $\Rightarrow A'B'QM - inscriptibil$.

Ţinând acum seama de "simetria figurii", au loc şi analoagele afirmaţiilor din observaţiile 1) şi 2), deci: $QP \parallel A'C'$ (6) şi $B'C'LP - inscriptibil$. (7)

Notând acum cu: A', B' şi cu C' – măsurile unghiurilor $\Delta A'B'C'$, din:

$$\left.\begin{array}{r} B'C'LP-inscriptibil\ (7)\Rightarrow m\left(\widehat{C'LP}\right)=180^0-m\left(\widehat{A'B'C'}\right)=180^0-B'=A'+C' \\ LK \parallel A'B' \Rightarrow m\left(\widehat{C'LK}\right)\overset{(3)}{=}m\left(\widehat{C'A'B'}\right)=A' \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow m\left(\widehat{KLP}\right)=m\left(\widehat{C'LP}\right)-m\left(\widehat{C'LK}\right)=\left(A'+C'\right)-A'=C' \\ QP \parallel A'C'\ (6)\Rightarrow m\left(\widehat{B'QP}\right)=m\left(\widehat{B'C'A'}\right)=C' \end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{KLP}\equiv\widehat{B'QP}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{KLPQ-inscriptibil}\quad (8)\quad \text{şi în mod analog arătăm că: } \boxed{KLMN-inscriptibil}. \quad (9)$$

În fine, ţinând acum seama de faptul că, două cercuri care au 3 puncte comune (distincte), coincid, din:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} KLMQ-inscriptibil\ (5) \\ KLPQ-inscriptibil\ (8) \end{array}\right\}\Rightarrow \odot \underline{KLMQ}=\odot KLPQ \\ \left.\begin{array}{l} KLMQ-inscriptibil\ (5) \\ KLMN-inscriptibil\ (9) \end{array}\right\}\Rightarrow \odot \underline{KLMQ}=\odot KLMN \end{array}\right\}\Rightarrow \odot KLPQ=\odot \underline{KLMQ}=\odot KLMN\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{punctele } K, L, M, N, P \text{ şi } Q-\text{sunt şase puncte conciclice!}}\ .\blacksquare$$