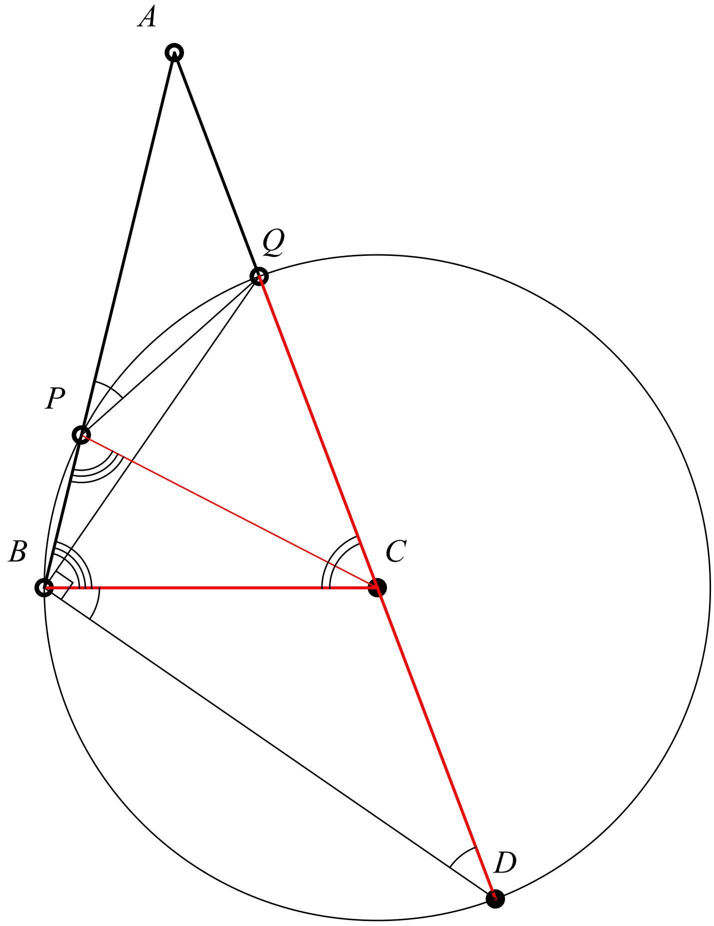
Problema BJ5 (Barajul II de selecţie a echipei Republicii Moldova, pt.OBMJ din 27 mai 2021):

> **Fie** ABC **un triunghi în care** $m\left(\widehat{ABC}\right)=76^0$ **şi** $m\left(\widehat{ACB}\right)=72^0$; **iar** $P\in(AB)$ **şi** $Q\in(AC)$ **sunt două puncte, astfel încât să avem:** $m\left(\widehat{ACP}\right)=44^0$ **şi** $m\left(\widehat{ABQ}\right)=22^0$. **Găsiţi** $m\left(\widehat{APQ}\right)$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): În triunghiul QBC, avem:

$$m\left(\widehat{QBC}\right)=m\left(\widehat{ABC}\right)-m\left(\widehat{PBQ}\right)=76^0-22^0=54^0\Rightarrow \underline{m\left(\widehat{QBC}\right)=54^0}\ (1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{CQB}\right)=180^0-\left[m\left(\widehat{QBC}\right)+m\left(\widehat{ACB}\right)\right]=180^0-\left(54^0+72^0\right)=54^0\Rightarrow \underline{m\left(\widehat{CQB}\right)=54^0}. \quad (2)$$

Aşa că din relaţiile (1) şi (2), rezultă că: $\widehat{QBC}\equiv\widehat{CQB}\Leftrightarrow[CQ]\equiv[BC]$. (3)

Pe de altă parte, din ΔPCB, rezultă că:

$$m\left(\widehat{BCP}\right)=m\left(\widehat{ACB}\right)-m\left(\widehat{ACP}\right)\overset{(ip)}{=}72^0-44^0=28^0\Rightarrow m\left(\widehat{CPB}\right)=180^0-\left[m\left(\widehat{ABC}\right)+m\left(\widehat{CPB}\right)\right]=$$

$$=180^0-\left(76^0+28^0\right)=76^0\overset{(ip)}{=}m\left(\widehat{PBC}\right)\Rightarrow\widehat{CPB}\equiv\widehat{PBC}\Leftrightarrow[CB]\equiv[CP]. \quad (4)$$

Notâd acum cu $D:=S_C(Q)$, avem:

$$[CQ]\equiv[CD]\quad(5)\Rightarrow m\left(\widehat{CBD}\right)=m\left(\widehat{BDC}\right)=\frac{1}{2}.m\left(\widehat{ACB}\right)\overset{(ip)}{=}\frac{1}{2}\cdot72^0=36^0\Rightarrow m\left(\widehat{BDC}\right)=36^0\quad(6)$$

şi ţinând apoi seama de relaţiile (3), (4) şi (5), obţinem că: $[CD]\overset{(5)}{\equiv}[CQ]\overset{(3)}{\equiv}[BC]\overset{(4)}{\equiv}[CP]\Rightarrow$

$$\Rightarrow BDQP-inscriptibil\left(\odot BDQP=\odot\left(C;|BC|\right)\right)\Rightarrow m\left(\widehat{APQ}\right)=m\left(\widehat{BDC}\right)\overset{(6)}{=}36^0\Rightarrow\boxed{m\left(\widehat{APQ}\right)=36^0}.$$

■■■