Problema 4464 din rev.CRUX, nr.7/2019:

În triunghiul ABC, ***notăm cu*** k,l ***şi respectiv*** $m-$ ***dreptele support ale bisectoarelor exterioare ale ungiurilor*** A,B ***şi respectiv*** C; ***iar cu:*** $L=pr_l(A), K=pr_k(B), M=pr_l(C)$, $N=pr_m(B), P=pr_m(A)$ ***şi*** $Q=pr_k(C)$. ***Arătaţi că punctele*** K,L,M,N,P ***şi*** $Q-$ ***sunt şase puncte conciclice.*** **(Borislav Mirchev şi Leonard Giurgiuc)**

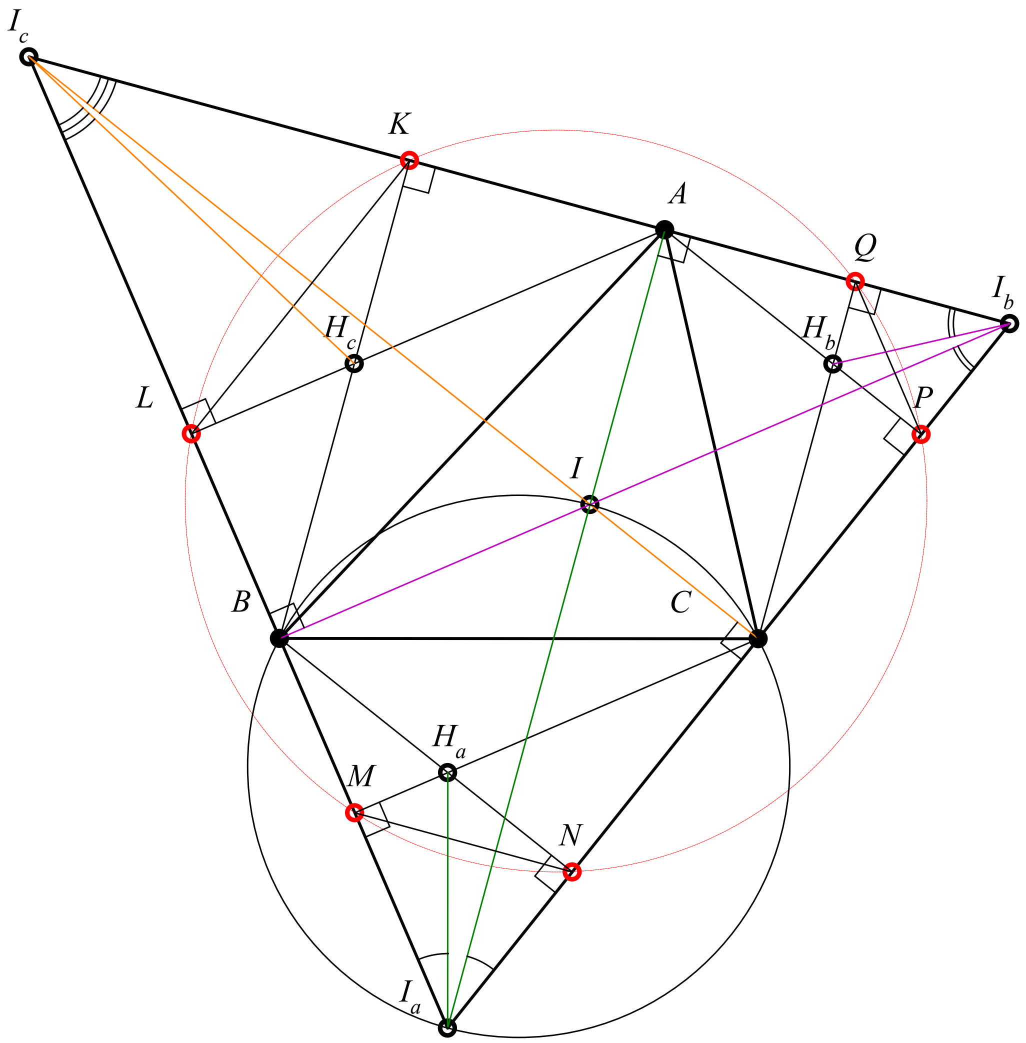

Fig.1.

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $I-$centrul cercului înscris şi cu I_a,I_b,I_c-centrele cercurilor exânscrise triunghiului ABC; iar cu $\{H_a\}=BN\cap CM, \{H_b\}=CQ\cap AP$ şi $\{H_c\}=AL\cap BK$ (punctele H_a,H_b şi H_c-sunt ortocentrele triunghiurilor I_aBC, I_bAC şi respectiv I_cBA) (v.fig.), avem: $I_bI_c=k, I_aI_b=l, I_aI_c=m$ şi atunci, din:

$$\left.\begin{array}{l} IB=I_bB\perp I_aI_c \\ IC=I_cC\perp I_aI_b \end{array}\right\} \Rightarrow IBI_aC-inscriptibil \Rightarrow \Delta I_aCB-\text{este înscris în cercul } \odot IBI_aC-\text{în care}$$

$[II_a]-este\ diametru \Rightarrow$ semidreptele $(I_aH_a$ şi $(I_aI-$sunt izogonale faţă de unghiul $\widehat{I_cI_aI_b}$, aşa că proicţiile punctelor $H_a\in(I_aH_a$ şi $C\in(I_aI=(I_aC$, pe laturile unghiului $\widehat{I_cI_aI_b}$, sunt patru puncte conciclice $\Rightarrow LMNP-este\,inscriptibil \Leftrightarrow \boxed{|I_aL|\cdot|I_aM|=|I_aN|\cdot|I_aP|}$. (1)

În mod analog arătăm că:

$$NPQK-este\ inscriptibil \Leftrightarrow \boxed{|I_bN|\cdot|I_bP|=|I_bK|\cdot|I_bQ|}; \quad (2)$$

şi $KLMQ-este\ inscriptibil \Leftrightarrow \boxed{|I_cK|\cdot|I_cQ|=|I_cL|\cdot|I_cM|}$. (3)

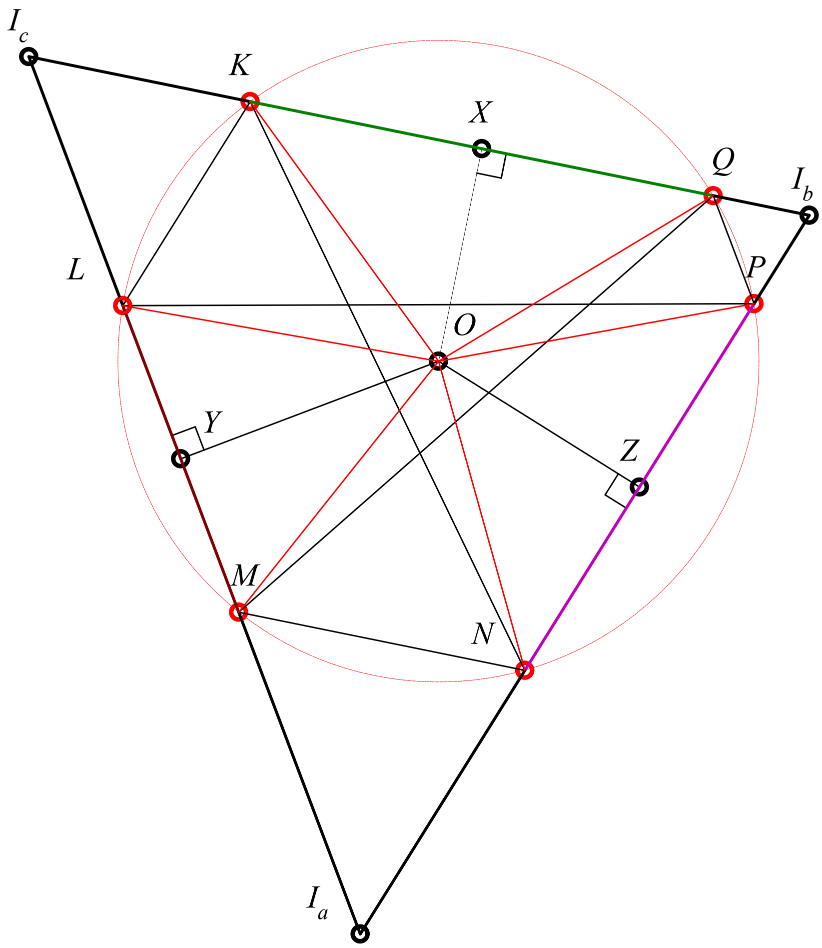

Fig.2.

Notând acum cu X, Y şi $Z -$ mijloacele segmentelor $[KQ], [LM]$ şi respectiv $[NP]$; iar cu $O -$ centrul cercului circumscris patrulaterului $LMNP$, avem (v.Fig.2):

$$|XK| = |XQ| = x, |YL| = |YM| = y, |ZN| = |ZP| = z, |OL| = |OM| = |ON| = |OP| \quad (4)$$

$$\text{iar } OY \perp LM\left(=I_a I_c\right) \text{ şi } OZ \perp NP\left(=I_a I_b\right). \quad (5)$$

Ţinând acum seama de relaţiile (4), relaţia (1) devine:

$$|I_a L| \cdot |I_a M| = |I_a N| \cdot |I_a P| \Leftrightarrow \left(|I_a Y| + |YL|\right) \cdot \left(|I_a Y| - |YM|\right) = \left(|I_a Z| - |ZN|\right) \cdot \left(|I_a Z| + |ZP|\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|I_a Y| + y\right) \cdot \left(|I_a Y| - y\right) = \left(|I_a Z| - z\right) \cdot \left(|I_a Z| + z\right) \Leftrightarrow \boxed{|I_a Y|^2 - y^2 = |I_a Z|^2 - z^2}. \quad (1')$$

În mod analog arătăm că:

$$|I_b N| \cdot |I_b P| = |I_b K| \cdot |I_b Q| \, (2) \Leftrightarrow \boxed{|I_b Z|^2 - z^2 = |I_b X|^2 - x^2}; \quad (2')$$

$$|I_c K| \cdot |I_c Q| = |I_c L| \cdot |I_c M| \, (3) \Leftrightarrow \boxed{|I_c X|^2 - x^2 = |I_c Y|^2 - y^2}. \quad (3')$$

Adunând acum relaţiile (1'), (2') şi (3'), membru cu membru obţinem în mod succesiv, că:

$$\left(|I_a Y|^2 - y^2\right) + \left(|I_b Z|^2 - z^2\right) + \left(|I_c X|^2 - x^2\right) = \left(|I_a Z|^2 - z^2\right) + \left(|I_b X|^2 - x^2\right) + \left(|I_c Y|^2 - y^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|I_c X|^2 + |I_a Y|^2 + |I_b Z|^2\right) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \left(|I_c Y|^2 + |I_a Z|^2 + |I_b X|^2\right) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |I_c X|^2 + |I_a Y|^2 + |I_b Z|^2 = |I_c Y|^2 + |I_a Z|^2 + |I_b X|^2. \quad (6)$$

Relaţia (6), ne arată că perpendicularele ridicate în punctele $X \in \left[I_b I_c\right], Y \in \left[I_a I_c\right]$ şi $Z \in \left[I_a I_b\right]$, pe laturile corespunzătoare ale $\Delta I_a I_b I_c$, sunt concurente (teorema lui Carnot); aşa că ţinând acum seama de relaţiile (5), rezultă că: $OX \perp I_b I_c \left(= KQ\right)$. (7)

În fine, relaţiile (4), (5) şi (7), ne arată că dreptele OX, OY şi $OZ -$ sunt mediatoarele segmentelor $[KQ], [LM]$ şi respectiv $[NP]$; aşa că punctul $O -$ găsindu-se la intersecţia mediatoarelor a câte 2 laturi ale patrulaterelor inscriptibile $NPQK$ şi $KLMQ \Rightarrow$ punctul $O-$centrul cercului circumscris celor trei patrulatere $LMNP, NPQK$ şi $KLMQ$; prin urmare avem:

$$|OL|=|OM|=|ON|=|OP|=|OK|=|OQ| \Rightarrow \boxed{K, L, M, N, P \text{ şi } Q-\textit{sunt şase puncte conciclice}}.\blacksquare$$

OBSERVAŢIE: În soluţia dată am demonstrat următoarea:

Teoremă:

Fiind dat un triunghi oarecare $I_aI_bI_c$ şi punctele $K, Q \in [I_bI_c]$; $L, M \in [I_aI_c]$; $N, P \in [I_aI_b]$; astfel încât patrulaterele $LMNP, NPQK$ şi $KLMQ$ sunt inscriptibile, atunci punctele K, L, M, N, P şi $Q-$sunt conciclice.