Problema săptămânii 258

Dacă $a, b, c > 1$ satisfac $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} = 1$, demonstraţi că $abc \geq 64$.

Soluţia 1: Din inegalitatea dintre media geometrică şi cea armonică avem

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}},$$

prin urmare este suficient să demonstrăm că $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq \dfrac{3}{4}$.

Inspiraţi de condiţia din enunţ şi de cazul de egalitate $a = b = c = 4$, căutăm să demonstrăm o inegalitate de forma

$$\frac{1}{x} \leq m \cdot \frac{1}{x-1} + n, \quad \forall\, x > 1$$

care să fie satisfăcută cu egalitate pentru $x = 4$. Inegalitatea precedentă revine la $x - 1 \leq mx + nx(x-1)$, deci la $nx^2 + (m-n-1)x + 1 \geq 0$. Ştim că trebuie să avem egalitate pentru $x = 4$ şi că factorul $(x-4)$ trebuie să apară la putere pară (altfel expresia îşi schimbă semnul în $x = 4$), deci trebuie să avem $nx^2 + (m-n-1)x + 1 = n(x-4)^2$, cu $n > 0$. Identificând coeficienţii găsim $16n = 1$ şi $-8n = m - n - 1$, de unde $n = \dfrac{1}{16}$, apoi $m = \dfrac{9}{16}$. Astfel, am dedus şi am demonstrat că

$$\frac{1}{x} \leq \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{16}, \quad \forall\, x > 1,$$

cu egalitate dacă şi numai dacă $x = 4$.

Scriind această inegalitate pentru a, b, c, adunând şi ţinând seama de condiţia $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} = 1$ se obţine

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{16}\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1}\right) + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a = b = c = 4$.

Soluţia 2: (*Elisa Ipate, David Ghibu*)
Notăm $a-1 = x$, $b-1 = y$, $c-1 = z$. Atunci $x, y, z > 0$ satisfac $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, adică $xy + yz + zx = xyz$, iar inegalitatea de demonstrat revine la $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 64$. Din inegalitatea mediilor, $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$, de unde $xyz \geq 27$ şi $xy + yz + zx = xyz = 27$.

În plus, $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) = 81$ implică $x+y+z \geq 9$, deci $(x+1)(y+1)(z+1) = xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1 \geq 27+27+9+1 = 64$.

Soluţia 3: (*Lucian Maran*)

Facem substituțiile $x = \frac{1}{a-1}, y = \frac{1}{b-1}, z = \frac{1}{c-1}$ și obținem enunțul echivalent:

$x, y, z > 0, x+y+z = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64.$

Vom demonstra această nouă inegalitate:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \overset{Huygens^*}{\geq} \left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}}\right)^3 \overset{hm-gm}{\geq} \left(1+\frac{3}{x+y+z}\right)^3 = \left(1+\frac{3}{1}\right)^3 = 64.$$

(*) Inegalitatea lui Huygens: $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq (1+\sqrt[n]{a_1a_2\dots a_n})^n, a_i \geq 0.$

Soluţia 4: (*David Ghibu, Darius Chiţu, Tashi Diaconescu, Titu Zvonaru*)

Soluție: Notăm $x = \frac{1}{a-1}, y = \frac{1}{b-1}, z = \frac{1}{c-1}$. Rezultă $a = \frac{x+1}{x}, b = \frac{y+1}{y}, c = \frac{z+1}{z}$

și trebuie să demonstrăm că dacă x, y, z > 0 cu x + y + z = 1, atunci (x + 1)(y + 1)(z + 1)>= 64xyz.

Folosind inegalitatea mediilor obținem

$$(1+x)(1+y)(1+z) = (x+x+y+z)(x+y+y+z)(x+y+z+z) \geq 4\sqrt[4]{x^2yz}\cdot 4\sqrt[4]{xy^2z}\cdot 4\sqrt[4]{xyz^2} = 64xyz.$$

Egalitate dacă și numai dacă x = y = z = 1/3, adică dacă și numai dacă a = b = c = 4.

Am primit soluţii de la: *Elisa Ipate, David Ghibu* (două soluţii), *Ovidiu Lazăr, Darius Chiţu, Lucian Maran, Tashi Diaconescu, Marius Valentin Drăgoi, Emanuel Mazăre, Ştefan Gobej* (două soluţii) şi *Titu Zvonaru.*

Problem of the week no. 258

If $a, b, c > 1$ satisfy $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} = 1$, prove that $abc \geq 64$.

Solution 1: From the inequality between the geometric and the harmonic means, we have

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

therefore it is sufficient to prove that $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{3}{4}$.

Inspired by the given condition and by the equality case $a = b = c = 4$, we intend to prove an inequality of the form

$$\frac{1}{x} \leq m \cdot \frac{1}{x-1} + n, \quad \forall x > 1,$$

with convenient m and n, to be determined, an inequality that is satisfied with equality when $x = 4$. The previous inequality reduces to $x - 1 \leq mx + nx(x-1)$, i.e. to $nx^2 + (m - n - 1)x + 1 \geq 0$. We know we must have equality for $x = 4$ and also that the factor $(x-4)$ must occur at an even exponent, otherwise the expression would change sign at $x = 4$. Thus, we must have $nx^2 + (m-n-1)x + 1 = n(x-4)^2$, cu $n > 0$. Identifying the coefficients leads to $16n = 1$ and $-8n = m - n - 1$, i.e. $n = \dfrac{1}{16}$ and then $m = \dfrac{9}{16}$. In conclusion, we have found and proven the inequality

$$\frac{1}{x} \leq \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{16}, \quad \forall x > 1,$$

with equality holding only for $x = 4$.

Writing this inequality for a, b, c instead of x, adding them together and taking into consideration the condition $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} = 1$ leads to

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{9}{16}\left(\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1}\right) + \frac{3}{16} = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{4}.$$

Equality holds if and only if $a = b = c = 4$.

Solution 2: (*Elisa Ipate*)
Put $a - 1 = x$, $b - 1 = y$, $c - 1 = z$. Then $x, y, z > 0$ satisfy $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$, i.e. $xy + yz + zx = xyz$, and the inequality to be proven becomes $(x+1)(y+1)(z+1) \geq 64$.
From the AM-GM inequality. $1 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$, hence $xyz \geq 27$ and $xy + yz + zx = xyz = 27$.
Moreover, $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) = 81$ leads to $x + y + z \geq 9$, and thus $(x + 1)(y + 1)(z + 1) = xyz + xy + yz + zx + x + y + z + 1 \geq 27 + 27 + 9 + 1 = 64$.