Problema săptămânii 255

Determinaţi toate numerele întregi m şi n pentru care $\dfrac{m^2+n}{n^2-m}$ şi $\dfrac{n^2+m}{m^2-n}$ sunt simultan numere întregi.

PAMO 2021

Soluţie:

• Dacă $m=0$ rezultă imediat că $n \mid 1$, adică $n \in \{-1,1\}$. Se verifică imediat că $(-1,0)$ şi $(1,0)$ sunt soluţii. Analog, $(0,-1)$ şi $(0,1)$ sunt soluţii. În continuare presupunem $n,m \in \mathbb{Z}^*$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune $m \geq n$.

• Dacă $m-n>1$ atunci $(m^2-n)-(n^2+m)=(m+n)(m-n-1)$ şi avem trei subcazuri:

1. dacă $m+n>0$, atunci $m^2-n>n^2+m \geq n+m>0$ astfel că $0<\dfrac{n^2+m}{m^2-n}<1$, deci $\dfrac{n^2+m}{m^2-n} \notin \mathbb{Z}$, contradicţie;

2. dacă $m+n=0$, adică $m=-n$, obţinem perechile de forma $(m,-m)$ cu $m \geq 2$;

3. dacă $m+n<0$ atunci $n<m<-n$ implică $m^2<n^2$ deci $n^2-m>m^2-m=m(m-1) \geq 0$. Cum $(n^2-m)-(m^2+n)=(n-m-1)(m+n)>0$ şi $(n^2-m)+(m^2+n)=n(n+1)+m(m-1)>0$ (e uşor de văzut că ultima inegalitate este strictă!), avem că $-1<\dfrac{m^2+n}{n^2-m}<1$. Atunci $\dfrac{m^2+n}{n^2-m} \in \mathbb{Z}$ revine la $m^2+n=0$. Apoi, $n=-m^2$ conduce la $m \mid 1$ dar asta contrazice fie $m+n<0$, fie $m-n>1$.

• Dacă $m=n$, se ajunge la $m-1 \mid m+1$, adică $m-1 \mid 2$, deci la $m \in \{-1,0,2,3\}$. Găsim soluţiile $m=n=-1$, $m=n=2$ şi $m=n=3$.

• Dacă $m-n=1$, adică $m=n+1$, trebuie ca $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$ şi $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z}$. A doua condiţie este mereu îndeplinită. Prima revine la $n^2-n-1 \mid 4n+2$. Cum n^2-n-1 este impar, deducem că $n^2-n-1 \mid 2n+1$, deci $n^2-n-1 \leq |2n+1|$. Dacă $2n+1 \leq 0$ se ajunge la $n(n+1) \leq 0$, deci la $n=-1$, $m=0$. Dacă $2n+1>0$, rezultă $n^2-3n-2 \leq 0$, adică $(n-1)(n-2) \leq 4$. Găsim $n \in \{0,1,2,3\}$. Convin $n=1$ şi $n=2$, obţinând soluţiile $n=1$, $m=2$ şi $n=2$, $m=3$.

Cazul $n>m$ se tratează analog.

În concluzie, perechile care satisfac condiţiile din enunţ sunt:
$(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(k,-k)$, cu $|k|>1$, $(-1,-1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,1)$ şi $(3,2)$.

Am primit soluţii complete de la: *David Ghibu, Ştefan Gobej* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 255

Determine all integers m and n such that both $\dfrac{m^2+n}{n^2-m}$ and $\dfrac{n^2+m}{m^2-n}$ are integers.

PAMO 2021

Solution:

• If $m=0$ it immediately follows that $n \mid 1$, i.e. $n \in \{-1,1\}$. It is easy to check that $(-1,0)$ and $(1,0)$ are indeed solutions. Similarly, $(0,-1)$ and $(0,1)$ are also solutions. Next, we assume $n, m \in \mathbb{Z}^*$. Without loss of generality, we may consider $m \geq n$.

• If $m-n>1$ then $(m^2-n)-(n^2+m)=(m+n)(m-n-1)$ and we have three sub-cases:

1. if $m+n>0$, then $m^2-n>n^2+m \geq n+m>0$ which means that $0<\dfrac{n^2+m}{m^2-n}<1$, hence $\dfrac{n^2+m}{m^2-n} \notin \mathbb{Z}$, contradiction;

2. if $m+n=0$, i.e. $m=-n$, we obtain the pairs $(m,-m)$ with $m \geq 2$;

3. if $m+n<0$ then $n<m<-n$ leads to $m^2<n^2$ and to $n^2-m> m^2-m=m(m-1) \geq 0$. As $(n^2-m)-(m^2+n)=(n-m-1)(m+n)>0$ and $(n^2-m)+(m^2+n)=n(n+1)+m(m-1)>0$ (it is easy to see why the last inequality is strict!), we have $-1<\dfrac{m^2+n}{n^2-m}<1$. Thus, $\dfrac{m^2+n}{n^2-m} \in \mathbb{Z}$ reduces to $m^2+n=0$. Next, $n=-m^2$ leads to $m \mid 1$ contradicting either $m+n<0$, or $m-n>1$.

• If $m=n$, then $m-1 \mid m+1$, i.e. $m-1 \mid 2$, leading to $m \in \{-1,0,2,3\}$. We obtain the solutions $m=n=-1$, $m=n=2$ and $m=n=3$.

• If $m-n=1$, i.e. $m=n+1$, we must have $\dfrac{n^2+3n+1}{n^2-n-1} \in \mathbb{Z}$ and $\dfrac{n^2+n+1}{n^2+n+1} \in \mathbb{Z}$. The second condition is always fulfilled. The first one reduces to $n^2-n-1 \mid 4n+2$. As n^2-n-1 is odd, we deduce that $n^2-n-1 \mid 2n+1$, so, necessarily, $n^2-n-1 \leq |2n+1|$. If $2n+1 \leq 0$ we get to $n(n+1) \leq 0$, i.e. $n=-1$, $m=0$. If $2n+1>0$, then $n^2-3n-2 \leq 0$, i.e. $(n-1)(n-2) \leq 4$. It follows that $n \in \{0,1,2,3\}$. Only $n=1$ and $n=2$ do lead to solutions, namely to $n=1$, $m=2$ and $n=2$, $m=3$.

The case $n>m$ is similar.

In conclusion, the pairs that satisfy the conditions in the statement are: $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(k,-k)$, with $|k|>1$, $(-1,-1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(2,1)$ and $(3,2)$.