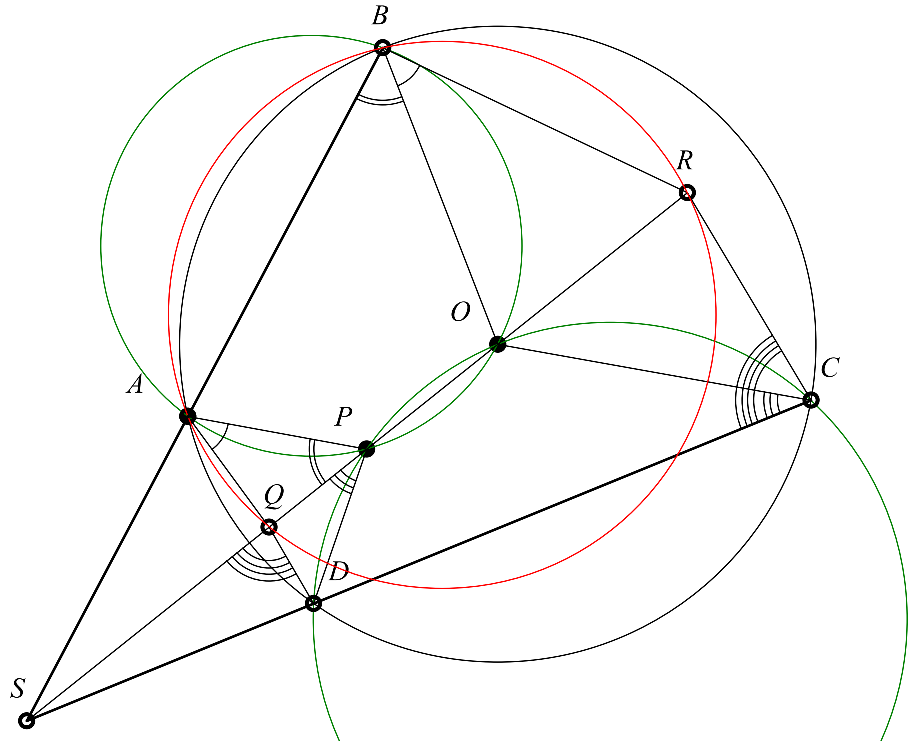
Problemei săptămânii 257 (12-18 iulie 2021):

Patrulaterul $ABCD$ – este înscris într-un cerc de centru O. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABO şi CDO se intersectează a doua oară într-un punct P, situate în interiorul triunghiului DAO. Pe prelungirea segmentului $[OP]$, dincolo de P, se consideră un punct Q, iar pe prelungirea segmentului $[OP]$, dincolo de O, se consideră un punct R.

Demonstraţi că: $\widehat{QAP} \equiv \widehat{OBR} \Leftrightarrow \widehat{QDP} \equiv \widehat{OCR}$.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*):

OBSERVAŢIE: Dacă patrulaterul $AB \parallel CD$, atunci patrulaterul inscriptibil $ABCD$ – este un trapez isoscel; iar cercurile $\odot OAB$ şi $\odot OCD$ sunt tangente în centrul O – al cercului său circumscris!

Cum prin ipoteză se pecizează că: $P \neq O$ şi $\odot OAB \cap \odot OCD = \{O; P\} \Rightarrow AB \nparallel CD \Rightarrow AB \cap CD \neq \varnothing$.

Aşa că, notâd acum cu: $\{S\} := AB \cap CD$, ţinând seama de faptul că: dreptele AB, CD şi OP – sunt axele radicale ale celor 3 perechilor de cercuri formate cu cercurile: $\odot ABCD$, $\odot OAB$ şi $\odot OCD \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\{S\} = AB \cap CD \cap OP} \ (1) \Rightarrow \rho_{\odot ABCD}(S) = \rho_{\odot OAB}(S) = \rho_{\odot OCD}(S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |SA| \cdot |SB| = |SO| \cdot |SP| = |SC| \cdot |SD|. \quad (2)$$

I. $\boxed{\widehat{QAP} \equiv \widehat{OBR} \Rightarrow \widehat{QDP} \equiv \widehat{OCR}}$.

Demonstraţie: Din:

$$\left.\begin{aligned} APOB - inscriptibil \Rightarrow \widehat{QPA} \equiv \widehat{OBA} \\ \widehat{QAP} \equiv \widehat{OBR}\,(ip.I) \end{aligned}\right\} \Rightarrow m\left(\widehat{AQS}\right) = m\left(\widehat{QPA}\right) + m\left(\widehat{QAP}\right) = m\left(\widehat{OBA}\right) + m\left(\widehat{QBR}\right) =$$

$$\left.\begin{aligned} = m\left(\widehat{ABR}\right) \Rightarrow \widehat{AQS} \equiv \widehat{ABR} \Rightarrow AQRB - inscriptibil \\ AB \cap QR = \{S\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow |SA| \cdot |SB| = \rho_{\odot AQRB}(S) = |SQ| \cdot |SR|. \quad (3)$$

Din relaţiile (2) şi (3), rezută că:

$$\left.\begin{aligned} \left.\begin{aligned} |SC| \cdot |SD| = |SQ| \cdot |SR| \Rightarrow \frac{|SD|}{|SR|} = \frac{|SQ|}{|SC|} \\ \widehat{QSD} = \widehat{RSC} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta DQS \sim \Delta RCS \Rightarrow \widehat{DQS} \equiv \widehat{SCR} \\ CDPO - inscriptibil\ (ip) \Rightarrow \widehat{DPS} \equiv \widehat{DCO} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\left(\widehat{QDP}\right)=m\left(\widehat{DQS}\right)-m\left(\widehat{DPS}\right)=m\left(\widehat{SCR}\right)-m\left(\widehat{DCO}\right)=m\left(\widehat{OCR}\right)\Rightarrow \boxed{\widehat{QDP}\equiv\widehat{OCR}}.\ \blacksquare$$

II. Implicaţia: $\boxed{\widehat{QDP}\equiv\widehat{OCR}\Rightarrow\widehat{QAP}\equiv\widehat{OBR}}$; se demostrază în mod analog, folosind “simetria” figurii faţă de dreapta OP !