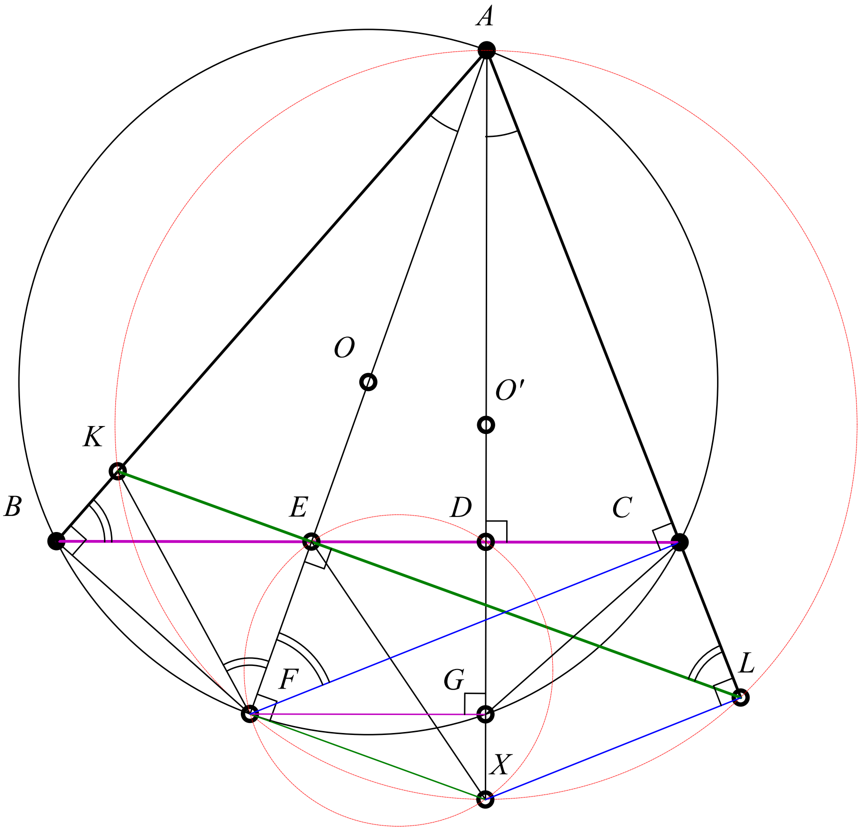
Problema 3 (JBMO-2021, Chişimău: 29 iunie-5 iulie, 2021):

Fie $O-$centrul cercului circumscris unui triunghi ascuţitunghi oarecare ABC. Notăm cu $D:=pr_{BC}(A)$ şi $\{E\}:=\left(AO\cap[BC]\right.$; iar cu $s-$dreapta care trece prin punctul E şi având proprietatea că: $d\perp AE$. În fine, notăm apoi cu K şi $L-$punctele de intersecţie ale dreptei s cu dreapta AB şi respectiv AC. Arătaţi că, dacă $\{X\}:=\left(AD\cap\odot AKL\right.$, cercurile circumscrise triunghiurilor ABC, AKL şi XDE au un punct comun.



SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând acum cu $\{F\}:=\left(AE\cap\odot ABC\right.$, problema se reduce la a arăta că $\boxed{F\in\odot AKL,\odot DEX}$ (v.Fig.).

Să observăm acum, că întrucât $[AF]-$este diametru în cercul $\odot ABC\Rightarrow AB\perp BF$ (1) şi atunci, din:

$$\left.\begin{array}{l}AB\perp BF\ (1)\\ KL\perp AF\ (ip)\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{LKF}\equiv\widehat{KBF}\left(=90^0\right)\Rightarrow BFEK-inscriptibil\Rightarrow\widehat{KFA}\equiv\widehat{ABC}.\quad(2)$$

Pe de altă parte, întrucât în ΔABC, $[AD]-$fiind diametru al cercului său circumscris şi înălţimea sa$[AD]$, semidreptele $[AD\supset[AF]$ şi $[AX\supset[AD]$ sunt izogonale fată de unghiul $\widehat{BAC}$, aşa că:

$$\widehat{FAB}\equiv\widehat{LAX}\quad(3)\quad\text{şi}\quad\widehat{XAB}\equiv\widehat{LAF};\quad(4)$$

iar coarda $[AX]-$a cercului circumscris triunghiului $\Delta AKL-$<u>este un diametru în</u> $\odot AKL$. (5)

Aşa că, din:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{DAB}=\widehat{XAB}\overset{(4)}{\equiv}\widehat{LAF}=\widehat{LAE}\\ \left.\begin{array}{l}AD\perp BC\ (ip)\\ AE\perp KL\ (ip)\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{ADB}\equiv\widehat{AEL}\end{array}\right\}\Rightarrow\widehat{ABC}\equiv\widehat{ELA}\quad(6)$$

şi acum din (2) şi (6), rezultă că:

$$\widehat{KFA}\equiv\left(\widehat{ELA}\right)=\widehat{KLA}\Rightarrow AKFL-inscriptibil\Rightarrow\boxed{F\in\odot AKL}.\blacksquare\quad(7)$$

În fine, ţinând acum seama de afirmaţia (5) şi (7), rezultă acum că:

$$\widehat{EFX}\equiv\widehat{CDX}(=90^0)\Rightarrow XDEF-inscriptibil\Rightarrow\boxed{F\in\odot DEX}.\blacksquare\blacksquare$$