Problema săptămânii 253

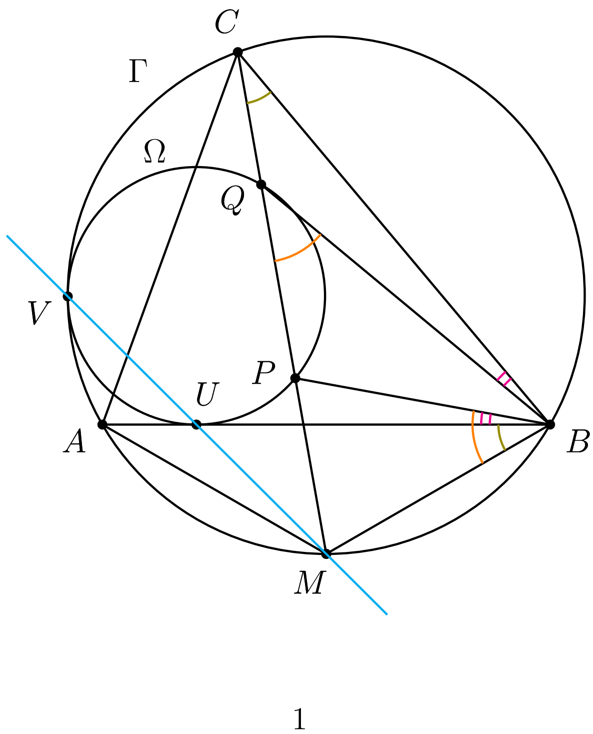
Fie Γ cercul circumscris triunghiului ABC. Un cerc Ω este tangent segmentului $[AB]$ şi este tangent cercului Γ într-un punct situat de aceeaşi parte a dreptei AB ca şi C. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCA$ intersectează Ω în două puncte diferite P şi Q. Demonstraţi că $\sphericalangle ABP \equiv \sphericalangle QBC$.

Dominika Regiec, Polonia, (EGMO 2018)

Soluţie: (prima dintre soluţiile oficiale)
Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $Q \in (CP)$.
Fie M mijlocul arcului AB care nu conţine punctul C, $\{V\} = \Omega \cap \Gamma$ şi $\{U\} = \Omega \cap AB$.
Demonstraţia poate fi împărţită în doi paşi:
1. *Arătăm că* $MP \cdot MQ = MB^2$.
Este bine cunoscut faptul că punctele V, U şi M sunt coliniare (într-adevăr, omotetia de centru V care transformă Ω în Γ duce punctul U în acel punct de pe Γ în care tangenta la Γ este paralelă cu AB; ori acest punct este M). În plus, triunghiurile MAV şi MUA sunt asemenea, deci $MU \cdot MV = MA^2 = MB^2$.
Alternativ, se poate folosi următoarea lemă cunoscută:
Fie Γ un cerc, AB o coardă în acest cerc şi M mijlocul unuia din cele două arce AB. O dreaptă care trece prin M intersectează din nou Γ în X şi intersectează coarda AB în Y. Atunci $MX \cdot MY = MA^2$.
Din puterea punctului M faţă de cercul Ω rezultă $MP \cdot MQ = MU \cdot MV = MB^2$.

2. *Finalizarea*
Relaţia $MP \cdot MQ = MB^2$ arată că triunghiurile MBP şi MQB sunt asemenea (LUL). Obţinem că $\sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle MQB$. Din faptul că $\sphericalangle MCB \equiv \sphericalangle MBA$ rezultă că

$$m(\sphericalangle QBC) = m(\sphericalangle MQB) - m(\sphericalangle MCB) = m(\sphericalangle MBP) - m(\sphericalangle MBA) = m(\sphericalangle PBA).$$



Soluţiile oficiale şi o prezentare video făcută de Geoff Smith pot fi găsite la linkurile din finalul acestui material.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Ana Boiangiu, Radu Stoleriu, Lucian Maran* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 253

Let Γ be the circumcircle of triangle ABC. A circle Ω is tangent to the line segment AB and is tangent to Γ at a point lying on the same side of the line AB as C. The angle bisector of $\sphericalangle BCA$ intersects Ω at two different points P and Q.
Prove that $\sphericalangle ABP = \sphericalangle QBC$.

Dominika Regiec, Poland, (EGMO 2018)

Official solution: see here, pb. 5
Watch also the video solution presented by Geoff Smith.