Barajul nr. 2 pentru JBMO

23 mai 2021

Problema 1. Notăm cu $d(n)$ numărul divizorilor pozitivi ai numărului natural nenul n. Determinaţi acei $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care nu există niciun $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\underbrace{d(\ldots d(d}_{k \text{ ori}}(n))\ldots)$ să fie pătrat perfect.

Problema 2. Numerele întregi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt diferite modulo n.
Dacă şi numerele $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1}$ sunt diferite modulo n, spunem că n-uplul ordonat $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este *norocos*.
Determinaţi valorile lui n pentru care există n-upluri norocoase.

Problema 3. Initîal, pe o tablă este scrisă ecuaţia $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$, unde a_1, b_1, c_1 sunt numere întregi şi $(a_1 + c_1)b_1 > 0$. La fiecare mutare, dacă pe tablă este scrisă ecuaţia $ax^2 + bx + c = 0$ şi există $x \in \mathbb{R}$ care verifică ecuaţia, Alice transformă această ecuaţia în $(b + c)x^2 + (c + a)x + (a + b) = 0$. Demonstraţi că Alice se va opri după un număr finit de mutări.

Problema 4. Cercurile ω_1 şi ω_2 au raze diferite şi sunt tangente exterior în punctul X. Punctele A şi B se află pe ω_1, iar punctele C şi D se află pe ω_2 astfel încât AC şi BD sunt tangentele comune celor două cercuri. CX intersectează AB în E şi cercul ω_1, a doua oară, în punctul F. Cercul circumscris triunghiului EFB intersectează a doua oară AF în G. Dacă $AX \cap CD = \{H\}$, arătaţi că punctele E, G, H sunt coliniare.