

## Barajul nr. 1 pentru JBMO

22 mai 2021

**Problema 1.** Într-un triunghi ascuțitunghic  $ABC$ , cercul de diametru  $[AB]$  intersectează înălțimea dusă din vârful  $C$  în punctul  $D$ , iar cercul de diametru  $[AC]$  intersectează înălțimea dusă din vârful  $B$  în punctul  $E$ . Dreptele  $BD$  și  $CE$  se intersectează în  $F$ . Demonstrați că

$$AF \perp DE.$$

**Problema 2.** Pentru ce valori ale numărului natural nenul  $n$  există un număr rațional neîntreg  $x$  astfel încât  $x^n + (x + 1)^n$  este număr întreg?

**Problema 3.** Într-o țară sunt 28 de orașe, iar între unele orașe există zboruri în ambele sensuri. În fiecare oraș există exact un aeroport, iar acesta poate fi mic, mijlociu sau mare. Se știe că orice circuit care conține mai multe de două orașe, nu trece prin niciun oraș de două ori și se termină în orașul din care a pornit, conține toate tipurile de aeroport. Care este numărul maxim de zboruri existente în această țară?

**Problema 4.** Fie  $x, y, z$  numere reale cu proprietatea că

$$\left| \frac{y}{z} - xz \right| \leq 1 \text{ și } \left| yz + \frac{x}{z} \right| \leq 1.$$

Aflați valoarea maximă a expresiei

$$x^3 + 2y.$$