Problema săptămânii 250

Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale pozitive şi

$$m = \min\left\{a_1 + \frac{1}{a_2}\,,\ a_2 + \frac{1}{a_3}\,,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\,,\ a_n + \frac{1}{a_1}\right\}.$$

Demonstraţi că $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq m.$

revista Tzaloa, nr. 2/2021

Soluţie: Fie $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.

Vom numi numărul a_k *mic* dacă $a_k \leq g$, respectiv *mare* dacă $a_k \geq g$. (Numerele egale cu g le considerăm şi mici şi mari.) Evident, trebuie să existe şi numere mici şi numere mari. (Dacă, de exemplu, ar exista numai numere mici, adică $a_k < g$, $\forall\, k$, atunci şi media lor geometrică ar fi mai mică decât g, absurd.) Vizualizând numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$, în această ordine, pe un cerc, va exista un număr mic urmat imediat de unul mare, adică va exista un $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $a_k \leq g \leq a_{k+1}$ (considerăm $a_{n+1} = a_1$ dacă este cazul).

Atunci $g + \dfrac{1}{g} \geq a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \geq m$, de unde concluzia.

Remarcă: Se poate arăta analog că egalitatea are loc dacă şi numai dacă numerele sunt egale. Partea de ,,dacă" este evidentă. Dacă nu sunt toate numerele egale, atunci trebuie să existe $a_i > g$ şi $a_j \leq g$. Punând numerele pe cerc, va exista un indice k astfel încât $a_k < g \leq a_{k+1}$ şi atunci $g + \dfrac{1}{g} > a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \geq m$.

Problema este oarecum asemănătoare cu problema 1 de la barajul 1 de juniori din acest an.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre, Ştefan Gobej* şi *Radu Stoleriu.*

Problem of the week no. 250

Let $a_1, a_2, \ldots, a_n$ be positive real numbers and let

$$m = \min\left\{a_1 + \frac{1}{a_2}\,,\ a_2 + \frac{1}{a_3}\,,\ \ldots\ ,\ a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\,,\ a_n + \frac{1}{a_1}\right\}.$$

Prove that $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} + \dfrac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}} \geq m.$

Tzaloa no. 2/2021

Solution: Put $g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$.
We call a_k *small* if $a_k \leq g$, and *large* if $a_k \geq g$. (Numbers equal to g are both small and large.) Clearly, there must be both small numbers and large numbers. (If there there are only small numbers, i.e. $a_k < g$, $\forall\, k$, then their geometric mean would also be less than g, which is absurd.) Writing the numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, in this order, on a circle, one can find a small number immediately followed by a large number, i.e. there is a $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ such that $a_k \leq g \leq a_{k+1}$ (we consider $a_{n+1} = a_1$).
Then $g + \dfrac{1}{g} \geq a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \geq m$, which proves the conclusion.

Remark: One can prove similarly that equality holds if and only if the numbers are all equal. The "if" part is clear. If the numbers are not all equal, there must be an $a_i > g$ and also an $a_j \leq g$. Thus, there is an index k such that $a_k < g \leq a_{k+1}$, hence $g + \dfrac{1}{g} > a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}} \geq m$.