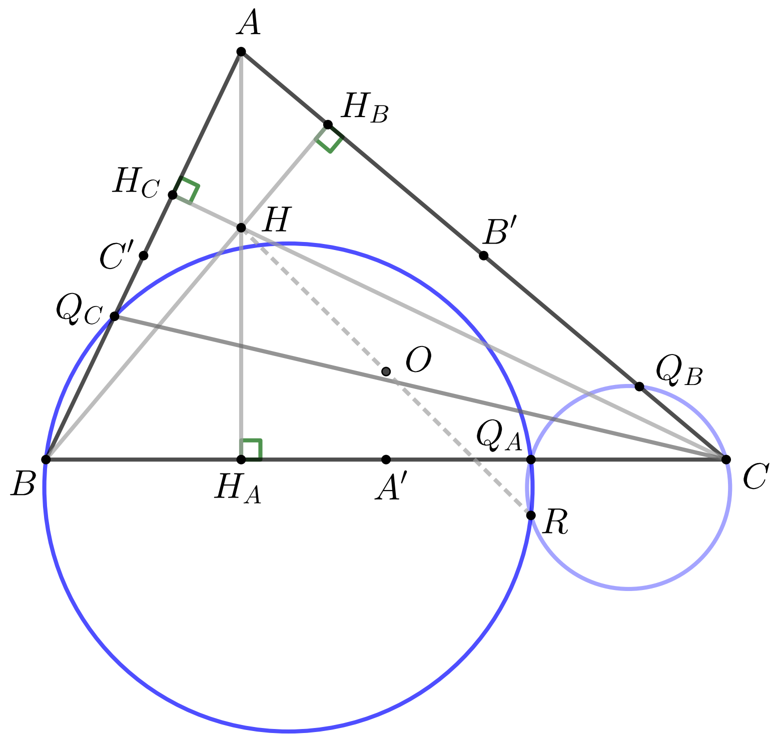
Problema săptămânii 249

Fie ABC un triunghi. Notăm cu H_A piciorul înălţimii din A a triunghiului ABC şi cu A' mijlocul segmentului $[BC]$. Notăm apoi cu Q_A simetricul lui H_A faţă de A'. Se definesc în mod analog punctele Q_B şi Q_C. În fine, notăm cu R punctul de intersecţie, diferit de Q_A, dintre cercurile circumscrise triunghiurilor Q_AQ_BC şi Q_ABQ_C. Demonstraţi că dreptele Q_AR şi BC sunt perpendiculare.

baraj EGMO, Franţa, 2021

Soluţia 1: (*David Ghibu*)
Evident, perpendicularele ridicate în H_A, H_B şi H_C pe laturile triunghiului sunt concurente (în ortocentrul acestuia), deci, conform teoremei lui Carnot, $BH_A^2 - CH_A^2 + CH_B^2 - AH_B^2 + AH_C^2 - BH_C^2 = 0$. Dar $BH_A = CQ_A$ şi analoagele, astfel că relaţia precedentă revine la $CQ_A^2 - BQ_A^2 + AQ_B^2 - CQ_B^2 + BQ_C^2 - AQ_C^2 = 0$. Conform reciprocei teoremei lui Carnot, perpendicularele ridicate în Q_A, Q_B, Q_C pe laturile triunghiului sunt concurente într-un punct R'. Avem atunci $R'Q_A \perp BC$ şi analoagele, ceea ce arată că punctele B, Q_C, R', Q_A sunt conciclice (se află pe cercul de diametru $[R'B]$) şi, la fel, punctele Q_B, C, R', Q_A sunt conciclice (aparţin cercului de diametru $[R'C]$). Deducem atunci că R' este al doilea punct de intersecţie dintre cercurile circumscrise triunghiurilor Q_AQ_BC şi Q_ABQ_C, adică este de fapt R. Prin urmare, $RQ_A \perp BC$.

Variantă: Se putea evita teorema lui Carnot şi considera direct R' ca fiind simetricul ortocentrului H faţă de centrul cercului circumscris, O. Cum H şi O se proiectează pe BC în punctele H_A, respectiv A', proiecţia lui R' pe BC va fi simetricul lui H_A faţă de A', adică Q_A. Se continuă ca mai sus ...



Soluţia 2: (*Titu Zvonaru*)
Deoarece dreapta RQ_A este axa radicală a cercurilor circumscrise triunghiurilor Q_AQ_BC şi Q_ABQ_C, ea este perpendiculară pe linia centrelor celor două cercuri. Vom demonsta că aceasta din urmă este paralelă cu BC.
Notăm cu M_C şi M_B mijloacele segmentelor $[Q_AC]$, respectiv $[Q_AB]$, iar cu O_C şi O_B centrele cercurilor circumscrise Q_AQ_BC, respectiv Q_ABQ_C.
Avem $Q_AC = c\cos B$, $Q_BC = c\cos A$, $Q_AB = b\cos C$, $Q_CB = b\cos A$ și atunci

$$(Q_AQ_B)^2 = c^2(\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A\cos B\cos C)$$
$$(Q_AQ_B)^2 + (Q_BC)^2 - (Q_AC)^2 = 2c^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)$$
$$(Q_AQ_C)^2 + (Q_CB)^2 - (Q_AB)^2 = 2b^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)$$

Deducem că unghiurile $\sphericalangle Q_AQ_BC$ și $\sphericalangle Q_AQ_CB$ sunt fie ambele obtuze, fie ambele ascuțite. Dacă notăm $\gamma = m(\sphericalangle Q_AQ_BC)$, obținem

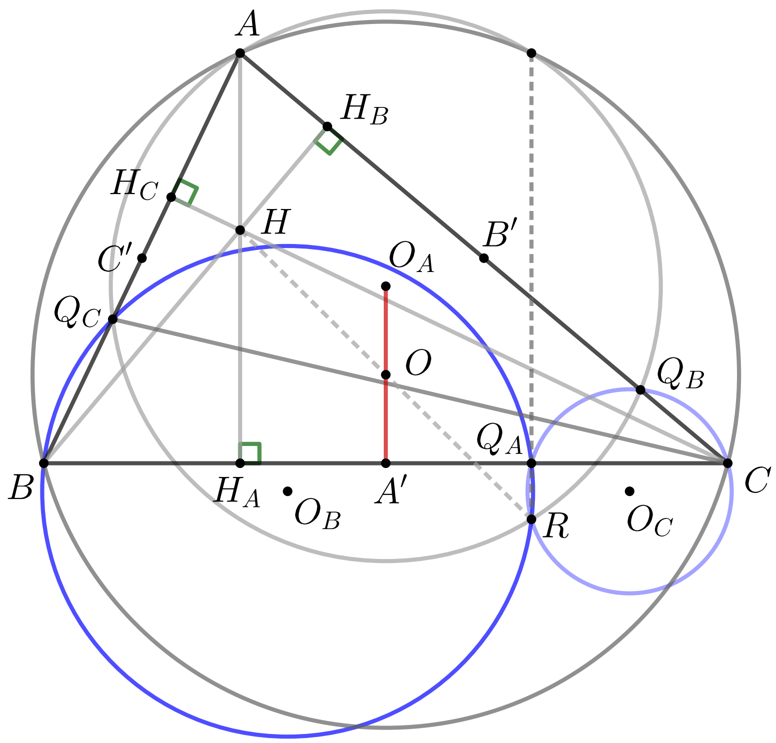
$$\cos\gamma = \frac{2c^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)}{2c\cos A\cdot Q_AQ_B} = \frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{Q_AQ_B}.$$

Rezultă că

$$O_CM_C = \frac{Q_AQ_B}{2\sin C}\cdot\frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{Q_AQ_B} = \frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{2\sin C}.$$

Analog, $O_BM_B = \dfrac{2b(\cos A - \cos B\cos C)}{2\sin B}$.
Atunci $O_BM_B = O_CM_C$, adică $O_BO_C \parallel BC$, de unde concluzia.

Remarcă: O altă proprietate interesantă a configuraţiei: dreapta Q_AR trece prin al doilea punct de intersecţie (diferit de A) dintre cercurile circumscrise triunghiurilor ABC şi AQ_BQ_C. Motivul este faptul că O_A, centrul cercului circumscris triunghiului AQ_BQ_C, se află pe mediatoarea lui $[BC]$. (Asta se poate arăta observând că B şi C au aceaşi putere faţă de acest cerc, deci sunt egal depărtate de centrul acestuia: $CQ_B\cdot CA = AH_B\cdot AC = AH_C\cdot AB = BQ_C\cdot BA$.) Mai mult, O_A este chiar simetricul lui A' faţă de O. Ultima afirmaţie rezultă din faptul că $[O_AO]$ şi $[OA']$ sunt linii mijlocii în triunghiurile RAH, respectiv XAH, unde X este simetricul lui A faţă de O.



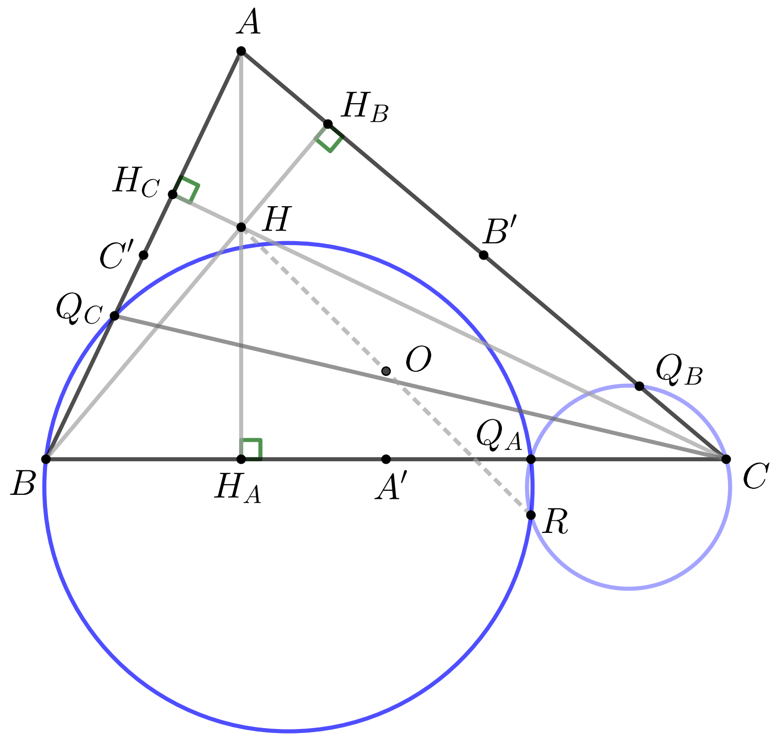
Am mai primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Stoleriu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 249

Let ABC be a triangle in which H_A is the foot of the altitude dropped from A and A' is the midpoint of the line segment $[BC]$. We denote by Q_A the reflection of H_A over A'. Points Q_B and Q_C are defined similarly. If R is the intersection point, other than Q_A, between the circumcircles of triangles Q_AQ_BC and Q_ABQ_C, prove that the lines Q_AR and BC are perpendicular.

EGMO TST, France, 2021

Solution 1: (*David Ghibu*)
The lines perpendicular at H_A, H_B and H_C to the sides of the triangle are concurrent (in the orthocenter) of the triangle, therefore, according to Carnot' Theorem, $BH_A^2 - CH_A^2 + CH_B^2 - AH_B^2 + AH_C^2 - BH_C^2 = 0$. But $BH_A = CQ_A$ and its analogues transform the previous relation into $CQ_A^2 - BQ_A^2 + AQ_B^2 - CQ_B^2 + BQ_C^2 - AQ_C^2 = 0$. By the converse of Carnot's Theorem, the lines perpendicular at Q_A, Q_B, Q_C to the sides of the triangle are concurrent at a point R'. Thus, $R'Q_A \perp BC$ and analogues, which shows that points B, Q_C, R', Q_A are con-cyclic (they all lie on the circle of diameter $[R'B]$). Similarly, points Q_B, C, R', Q_A are also con-cyclic (they belong to the circle of diameter $[R'C]$). It follows that R' is the second intersection point between the circumcircles of triangles Q_AQ_BC and Q_ABQ_C, i.e. R' coincides with R. We conclude that $RQ_A \perp BC$.



Solution 2: (*Titu Zvonaru*)
The line RQ_A is the radical axis of the circumcircles of triangles Q_AQ_BC and Q_ABQ_C, therefore it is perpendicular to the line joining the centers of the two circles. We prove that the latter is parallel to BC.
Let M_C and M_B de the midpoints of the line segments $[Q_AC]$ and $[Q_AB]$, respectively, and let O_C and O_B be the circumcenters of Q_AQ_BC and Q_ABQ_C, respectively.
We have $Q_AC = c\cos B$, $Q_BC = c\cos A$, $Q_AB = b\cos C$, $Q_CB = b\cos A$, therefore

$$\begin{aligned}
&(Q_AQ_B)^2 = c^2(\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A\cos B\cos C)\\
&(Q_AQ_B)^2 + (Q_BC)^2 - (Q_AC)^2 = 2c^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)\\
&(Q_AQ_C)^2 + (Q_CB)^2 - (Q_AB)^2 = 2b^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)
\end{aligned}$$

We deduce that angles $\sphericalangle Q_AQ_BC$ and $\sphericalangle Q_AQ_CB$ are either both obtuse, or both acute. If $\gamma = \sphericalangle Q_AQ_BC$, we get

$$\cos\gamma = \frac{2c^2\cos A(\cos A - \cos B\cos C)}{2c\cos A \cdot Q_AQ_B} = \frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{Q_AQ_B}.$$

It follows that

$$O_CM_C = \frac{Q_AQ_B}{2\sin C}\cdot\frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{Q_AQ_B} = \frac{2c(\cos A - \cos B\cos C)}{2\sin C}.$$

Similarly, $O_BM_B = \dfrac{2b(\cos A - \cos B\cos C)}{2\sin B}$.
Then $O_BM_B = O_CM_C$, i.e. $O_BO_C \parallel BC$, and the conclusion.