Problema săptămânii 248

În fiecare pătrat unitate al unei table 8×8 este aşezat fie un cavaler, fie un mincinos. Cavalerii spun mereu adevărul, micinoşii spun mereu minciuni. Să presupunem că fiecare din cele 64 de persoane aşezate în pătrat face următoarea afirmaţie:
,,Numărul mincinoşilor de pe coloana mea este mai mare (strict) decât numărul mincinoşilor de pe linia mea."
Stabiliţi numărul configuraţiilor compatibile cu afirmaţiile de mai sus.

Revista Tzaloa, nr. 2/2021

Soluţia oficială:
Vom demonstra mai întâi că toate coloanele au aceeaşi configuraţie.
Presupunem contrariul şi că în coloanele C_1 şi C_2 sunt configuraţii diferite. Fie c_1 şi c_2 numărul de mincinoşi din coloana C_1, respectiv C_2. Fără a pierde din generalitate, putem presupune că $c_1 \geq c_2$. Atunci trebuie să existe o linie L în care pe coloana C_1 este un mincinos, iar în coloana C_2 un cavaler. Să notăm cu ℓ numărul de mincinoşi de pe linia L. Atunci, pentru că afirmaţia făcută de către mincinosul de pe linia L, coloana C_1 este falsă, avem $c_1 \leq \ell$. Afirmaţia făcută de cavalerul aflat pe linia L, coloana C_2 fiind adevărată, avem $c_2 > \ell$. Deducem că $c_1 \leq \ell < c_2$, ceea ce contrazice $c_1 \geq c_2$. Concluzionăm că presupunerea noastră a fost falsă, deci toate coloanele au aceeaşi configuraţie.
Atunci este clar că dacă avem numai cavaleri, configuraţia nu este compatibilă cu afirmaţiile făcute căci am avea 0 mincinoşi pe fiecare linie şi fiecare coloană. Aşadar, trebuie să avem cel puţin un mincinos.
Reciproc, dacă toate coloanele au aceeaşi configuraţie şi avem cel puţin un mincinos, configuraţia este compatibilă cu afirmaţiile făcute. Într-adevăr, o persoană este situată pe o linie cu ℓ mincinoşi şi o coloană cu c mincinoşi este un mincinos, atunci $\ell = 8$ şi afirmaţia sa este falsă deoarece $c > 8$ este falsă. Dacă respectiva persoană este un cavaler, atunci $\ell = 0$ şi afirmaţia sa, $c > 0$ este adevărată deoarece există cel puţin un mincinos pe coloana respectivă.
Aşadar, pentru a obţine o configuraţie compatibilă cu afirmaţiile făcute, putem completa prima coloană oricum, exceptând posibilitatea de a pune numai cavaleri. Restul coloanelor se completează de o manieră unică, fiind identice cu prima. În total, sunt $2^8 = 256$ moduri de a completa prima coloană, deci sunt $256 - 1 = 255$ moduri convenabile de a completa pătratul.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 248

In each unit square of an 8×8 squares there is either a truth-teller or a liar. Truth-tellers always tell the truth, while liars always lie. Assume that all 64 make the following statement:
"The number of liars situated in my column is greater than the number of liars situated in my row."
How many configurations are compatible with the statements above?

Tzaloa, no. 2/2021

Official solution: First, we prove that all columns are identical. Assume this is not true, and let columns C_1 and C_2 have different configurations. Let c_1 and c_2 the number of liars in columns C_1 and C_2, respectively. Without loss of generality, we may assume that $c_1 \geq c_2$. Then there must be a row R which has a liar in column C_1 and a truth-teller in column C_2. Let r be the number of liars in row R. Then, since the statement made by the liar in row R, column C_1 is false, we have $c_1 \leq r$. The statement made by the truth-teller in row R, column C_2 being true, we have $c_2 > r$. We obtain $c_1 \leq r < c_2$, which contradicts $c_1 \geq c_2$. We conclude that our assumption was false, i.e. all the columns are identical.
It is clear that if we only have truth-tellers, the configuration is not consistent with the statements because we have 0 liars in every row and every column. Thus, there must be at least one liar (in every column).
Conversely, the configurations that have identical column containing at least one liar are all compatible with the statements. Indeed, let us examine the statement made by somebody positions in a row with r liars and a column with c liars. If this person is a liar, then $r = 8$ and his statement is indeed false because $c > 8$ is false. If this person is a truth-teller, then $\ell = 0$ and his statement, $c > 0$, is true because there is at least one liar in his column.
Thus, in order to get a configuration compatible with all the statements, we may fill the first column arbitrarily, with the exception of putting only truth-tellers. The rest of the columns are copies of the first one. In total, there are $2^8 = 256$ possibilities of filling the first columns. One exception means there are $256 - 1 = 255$ convenient ways of filling the square.