Problema săptămânii 247

Fie $f(x) = 3x^2 + 1$. Arătaţi că pentru orice număr natural nenul n, produsul

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

are cel mult n factori primi distincţi.

Géza Kós, Cyberspace Mathematical Competition, 2020

Soluţie: Vom demonstra afirmaţia prin inducţie după n.
Pentru $n = 1$, $f(1) = 4$ are exact un factor prim, pe 2.
Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n - 1$ şi o demonstrăm pentru n. Este suficient să demonstrăm că $f(n)$ are cel mult un factor prim care nu divide produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1)$. Fie p un asemenea factor prim. Atunci p divide $f(p) = 3n^2 + 1$ (deci $p \neq 3$ şi $p \neq n$), dar p nu divide niciunul din numerele $f(k) = 3k^2 + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Atunci p nu divide niciuna din diferenţele $f(n) - f(k) = 3(n-k)(n+k)$. Atunci p nu poate fi niciunul din numerele $n-1$, $n-2$, $\ldots, 2, 1$ şi nici $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n-1$. Cum $p \neq n$, deducem că $p \geq 2n$. Ori numărul $3n^2+1$ nu poate avea doi factori primi mai mari ca $2n$ deoarece produsul acestora ar fi mai mare ca $4n^2$, deci mai mare ca $3n^2+1$. Conchidem că $f(n)$ are cel mult un factor prim în plus faţă de produsul $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n-1)$. Deoarece acesta avea cel mult $n-1$ factori primi distincţi, produsul $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$ are cel mult cu unul în plus, deci cel mult n factori primi distincţi.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Radu Şerban, Cezara Danciu, Ştefan Gobej, Emanuel Mazăre, Ana Boiangiu* şi *Elisa Ipate.*

Problem of the week no. 247

Let $f(x) = 3x^2 + 1$. Prove that for any given positive integer n, the product

$$f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$$

has at most n distinct prime divisors.

Géza Kós, Cyberspace Mathematical Competition, 2020

Solution: We prove the statement by induction.
For $n = 1$, $f(1) = 4$ has exactly one prime divisor, namely 2.
Assume the statement to be true for $n-1$ and let us prove it for n. It is sufficient to show that $f(n)$ has at most one prime divisor that is not a divisor of the product $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1)$. Let p be such a divisor. Then p divides $f(p) = 3n^2 + 1$ (therefore $p \neq n$), but p does not divide any of the numbers $f(k) = 3k^2 + 1$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$. This means that p does not divide any of the differences $f(n) - f(k) = 3(n-k)(n+k)$. It follows that p can not be any of the numbers

$n-1,\ n-2,\ \dots, 2, 1,\ n+1,\ n+2,\ \dots, 2n-1$. As $p \neq n$, we obtain that $p \geq 2n$. But the number $3n^2+1$ can not have two prime divisors larger than $2n$ because their product would exceed $3n^2+1$. We conclude that $f(n)$ can have at most one prime divisor that is not already a factor of the product $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n-1)$. We know that this product has at most $n-1$ distinct prime divisors, therefore $f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n)$ has at most one more, i.e. n prime divisors altogether.