Problema săptămânii 246

Fie $n \geq 2$ un număr natural. Numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt din intervalul $[-2, 2]$ şi au suma nulă. Arătaţi că

$$|a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3| \leq 2n.$$

Când are loc egalitatea?

Concursul Traian Lalescu, 2019

Soluţia 1: Folosim inegalităţiile $x^3 \geq 3x - 2$, $\forall\, x \geq -2$ (inegalitate echivalentă cu $(x+2)(x-1)^2 \geq 0$) şi $x^3 \leq 3x + 2$, $\forall\, x \leq 2$ (inegalitate echivalentă cu $(x-2)(x+1)^2 \leq 0$). În prima avem egalitate dacă $x = 1$ sau $x = -2$, în cea de-a doua dacă $x = -1$ sau $x = 2$.
Scriind pentru fiecare $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ că $3a_k - 2 \leq a_k^2 \leq 3a_k + 2$ şi adunând relaţiile obţinute ne rezultă

$$-2n \leq a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 \leq 2n,$$

adică inegalitatea din enunţ. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă avem egalitate într-una sau alta din cele două inegalităţi de mai sus, adică fie atunci când $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-2, 1\}$, fie atunci când $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 2\}$. Este uşor de văzut că $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ are loc numai dacă $3 \mid n$ şi, fie o treime din numerele a_k sunt egale cu 2 şi restul egale cu -1, fie o treime din numere sunt egale cu -2, iar restul egale cu 1.

Soluţia 2: (*Marius Valentin Drăgoi, Mihai Ionuţ Drăgoi, Emanuel Mazăre*), la nivel de clasa a IX-a
Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi]$ astfel încât $a_k = 2\sin x_k$. Folosind formula
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, deducem că $\sin^3 x_k = \dfrac{3}{4}\sin x_k - \dfrac{1}{4}\sin 3x_k$.

$$\text{Atunci } |a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3| = \left|6\sum_{k=1}^{n}\sin x_k - 2\sum_{k=1}^{n}\sin 3x_k\right| = 2\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 3x_k\right| \leq 2n.$$

Cazurile de egalitate sunt uşor de dedus din condiţiile $\sin 3x_1 = \sin 3x_2 = \ldots = \sin 3x_n \in \{-1, 1\}$ şi $\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n = 0$.

Comentariu: Ideea de rezolvare poate fi descoperită studdind cazul de egalitate şi găsind un exemplu în cazul $n = 3$. De asemenea, căutând o inegalitate de forma $x^3 \geq mx + n$, $\forall\, x \in [-2, 2]$, este de asteptat ca ea să revină la ceva de genul $(x+2)(x-t)^2 \geq 0$, cu un t convenabil. Ori valoarea lui t poate fi aflată impunând condiţia ca x^2 să aibă coeficientul 0 în expresia $(x+2)(x-t)^2 = x^3 - mx - n$. Se obţine imediat $t = 1$. Analog, căutând p, q astfel ca $x^3 \leq px + q$, $\forall\, x \in [-2, 2]$, intuim că $x^3 - px - q = (x-2)(x-s)^2$ şi obţinem imediat $s = -1$.

Remarcă: Inegalitatea din stânga se demonstrează analog celei din dreapta sau, alternativ, folosind-o pe cea din dreapta pentru numerele $b_k = -a_k$ (care verifică şi ele condiţiile din enunţ) şi înmulţind apoi inegalitatea obţinută cu -1.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Cezara Danciu, Marius Valentin Drăgoi, Mihai Ionuţ Drăgoi* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 246

Let $n \geq 2$ be a positive integer. Real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ belong to the interval $[-2, 2]$ and have the sum equal to 0. Prove that

$$|a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3| \leq 2n.$$

When does equality hold?

Traian Lalescu Contest, 2019

Solution 1: We use that $x^3 \geq 3x - 2$, $\forall\, x \geq -2$ (it reduces to $(x+2)(x-1)^2 \geq 0$) and $x^3 \leq 3x + 2$, $\forall\, x \leq 2$ (comes down to $(x-2)(x+1)^2 \leq 0$). In the first one, equality holds for $x = 1$ and for $x = -2$, in the second one we have equality if $x = -1$ or $x = 2$.
Writing for each $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ that $3a_k - 2 \leq a_k^2 \leq 3a_k + 2$ and adding the inequalities gives

$$-2n \leq a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 \leq 2n,$$

i.e. the desires inequality. Equality holds if and only if one has equality either in the the first or in the second of the two inequalities above, i.e. if either $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-2, 1\}$, or $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{-1, 2\}$. It is easy to see that $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$ holds if and only if $3 \mid n$ and either one third of the numbers a_k are equal to 2 and the other ones are equal to -1, or one third of the numbers are equal to -2, while the remaining two thirds are equal to 1.

Solution 2: (*Marius Valentin Drăgoi, Mihai Ionuţ Drăgoi, Emanuel Mazăre*), not for juniors
Put $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi, \pi]$ such that $a_k = 2\sin x_k$. From the formula
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, we get $\sin^3 x_k = \dfrac{3}{4}\sin x_k - \dfrac{1}{4}\sin 3x_k$.

$$\text{Thus } |a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3| = \left|6\sum_{k=1}^{n}\sin x_k - 2\sum_{k=1}^{n}\sin 3x_k\right| = 2\left|\sum_{k=1}^{n}\sin 3x_k\right| \leq 2n.$$

The cases of equality follow easily from the conditions $\sin 3x_1 = \sin 3x_2 = \ldots = \sin 3x_n \in \{-1, 1\}$ and $\sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n = 0$.