Problema săptămânii 243

Pentru ce numere naturale nenule n există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât suma cifrelor lui k să fie n, iar suma cifrelor lui k^2 să fie n^2?

Soluţie: Vom demonstra că proprietatea are loc pentru orice număr natural n. Dacă alegem $k = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \ldots + 10^{a_n}$, unde $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ sunt numere naturale, atunci scrierea în baza 10 a numărului k conţine exact n cifre de 1, restul cifrelor fiind 0. Atunci suma cifrelor lui k este n.
În continuare, vom arăta că putem alege numerele a_j astfel încât scrierea în baza 10 a numărului k^2 să conţină exact n cifre de 1 şi $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cifre de 2, restul cifrelor fiind 0. Astfel, suma cifrelor lui k^2 va fi $n + n(n-1) = n^2$.
Avem $k^2 = (10^{a_1} + 10^{a_2} + \ldots + 10^{a_n})^2 = 10^{2a_1} + 10^{2a_2} + \ldots + 10^{2a_n} + 2\sum\limits_{1 \le i < j \le n} 10^{a_i + a_j}$.
Dacă toţi exponenţii lui 10 sunt distincţi, numărul obţinut are într-adevăr n cifre de 1 şi $\dfrac{n(n-1)}{2}$ cifre de 2.
Pentru a ne asigura de acest lucru, putem considera, de exemplu, $a_j = 2^j$. Atunci exponenţii $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ sunt puteri distincte ale lui 2, iar exponenţii $a_i + a_j$ sunt sume de puteri diferite ale lui 2, distincte două câte două între ele şi distincte şi de exponenţii de forma $2a_j$ datorită unicităţii scrierii în baza 2.

Am primit soluţii corecte de la: *Emanuel Mazăre, Radu Şerban* şi *Ana Duguleanu.*

Problem of the week no. 243

For which positive integers n does there exist a positive integer k such that the sum of the digits of k is n, while the sum of the digits of k^2 is n^2?

Solution: We prove that all positive integers n satisfy the condition.
If we choose $k = 10^{a_1} + 10^{a_2} + \ldots + 10^{a_n}$, where $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ are positive integers, then sthe base 10 representation of k has exactly n that are 1, while all the other digits are 0. Thus, the digit sum of k is n.
In the sequel, we shall choose the integers a_j such that the base 10 representation of the number k^2 contains exactly n digits equal to 1 and $\dfrac{n(n-1)}{2}$ digits equal to 2, all the remaining digits being 0. Thus, the digit sum of k^2 will be $n+n(n-1) = n^2$.
We have $k^2 = (10^{a_1}+10^{a_2}+\ldots+10^{a_n})^2 = 10^{2a_1}+10^{2a_2}+\ldots+10^{2a_n}+2\sum\limits_{1 \le i < j \le n} 10^{a_i+a_j}$.
If all the exponents of 10 are distinct, then k^2 has indeed n digits of 1 and $\dfrac{n(n-1)}{2}$ digits of 2.
In order to insure distinct exponents, one can take, for example, $a_j = 2^j$. In

this case, the exponents $2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_n$ are distinct powers of 2, while exponents a_i+a_j are sums of two distinct powers of 2, thus different from those of the form $2a_j$ and also distinct two by two because of the uniqueness of the base 2 representation of a number.