Problema săptămânii 242

Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ numere reale din intervalul $[1, 2]$. Demonstraţi că

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

şi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă n este par şi
$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 2, \ldots, 1, 2)$ sau $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2, 1, \ldots, 2, 1)$.

antrenament EGMO, Italia, 2021

Soluţia 1: Vom demonstra că $|x - y| \leq \frac{1}{3}(x + y)$, $\forall\, x, y \in [1, 2]$, cu egalitate dacă $\{x, y\} = \{1, 2\}$.
Datirită simetriei, putem presupune că $1 \leq x \leq y \leq 2$. Atunci inegalitatea de mai sus revine la $3(y - x) \leq x + y$, adică la $y \leq 2x$, inegalitate adevărată deoarece $y \leq 2 = 2 \cdot 1 \leq 2 \cdot x$. Egalitatea are loc dacă $y = 2$ şi $x = 1$.

Scriind inegalitatea de mai sus pentru $x = x_i$ şi $y = x_{i+1}$, cu $i = 1, 2, \ldots, n$ (unde $x_{n+1} = x_1$) şi adunând aceste inegalităţi, obţinem inegalitatea din enunţ.
Pentru a avea egalitate trebuie ca numerele 1 şi 2 să alterneze, adică să ne aflăm într-unul din cele două cazuri precizate în enunţ.

Soluţia 2: Vom demonstra inegalitatea prin inducţie după n.
Pentru $n = 2$ ea devine inegalitatea auxiliară demonstrată la Soluţia 1.
Presupunem afirmaţia adevărată pentru n numere şi considerăm $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in [1, 2]$. Notăm indicii modulo $n + 1$. Distingem două cazuri:
• Dacă există măcar un indice $i \in \{1, 2, \ldots, n + 1\}$ astfel încât $x_{i-1} \leq x_i \leq x_{i+1}$ sau $x_{i-1} \geq x_i \geq x_{i+1}$, atunci $|x_{i-1} - x_i| + |x_i - x_{i+1}| = |x_{i-1} - x_{i+1}$, deci, din ipoteza de inducţie, $|x_1 - x_2| + \ldots + |x_{i-1} - x_i| + |x_i - x_{i+1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_1| = |x_1 - x_2| + \ldots + |x_{i-1} - x_{i+1}| + \ldots + |x_{n+1} - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{i-1} + x_{i+1} + \ldots + x_{n+1}) < \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1})$, deci în acest caz inegalitatea este adevărată şi nu putem avea egalitate.
• Dacă diferenţele $x_{i+1} - x_i$ au semne alternante, atunci $n + 1 = 2k$ este par şi $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{n+1} - x_1| = 2(|x_2 + x_4 + \ldots + x_{2k}| - |x_1 + x_3 + \ldots + x_{2k-1}|) \leq \frac{2}{3}(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2k} + x_1 + x_3 + \ldots + x_{2k-1})$, ultima inegalitate rezultând din $\max\{x_1 + x_3 + \ldots + x_{2k-1},\, x_2 + x_4 + \ldots + x_{2k}\} \leq 2k \leq 2 \cdot \min\{x_1 + x_3 + \ldots + x_{2k-1},\, x_2 + x_4 + \ldots + x_{2k}\}$.
Inegalitatea pentru $n + 1$ este astfel demonstrată, iar egalitate putem avea numai dacă ,,munţii" alternează cu ,,văile" (terminologia este explicată în materialul ,,Munţi şi văi"), munţii au altitudine 2, iar văile altitudine 1.

Probleme oarecum înrudite puteţi vedea în materialul *Munţi şi văi* ataşat soluţiei.

Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, Emanuel Mazăre, David Ghibu, Marius Valentin Drăgoi, Ana Duguleanu, Andrei Pană, Marian Cucoaneş, Mihai Drăgoi, Radu Stoleriu* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 242

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ be real numbers belonging to the interval $[1, 2]$. Prove that

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

and prove that equality holds if and only if n is even and $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 2, \ldots, 1, 2)$ or $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2, 1, \ldots, 2, 1)$.

EGMO training, Italy, 2021

Solution: We prove that $|x - y| \leq \frac{1}{3}(x + y)$, $\forall\, x, y \in [1, 2]$, with equality if and only if $\{x, y\} = \{1, 2\}$.
Because of the symmetry, we may consider $1 \leq x \leq y \leq 2$. In this case, the inequality reduces to $3(y - x) \leq x + y$, i.e. to $y \leq 2x$, which is obvious because $y \leq 2 = 2 \cdot 1 \leq 2 \cdot x$. Equality holds if $y = 2$ and $x = 1$.

Writing the above inequality for $x = x_i$ and $y = x_{i+1}$, cu $i = 1, 2, \ldots, n$ (where $x_{n+1} = x_1$), and adding these inequalities, we obtain the required inequality.
In order to have equality, the numbers a and 2 must alternate, which indicates that one must be in one of the two cases in the statement.