PROBLEME CU MUNŢI ŞI VĂI

de ANDREI ECKSTEIN, TIMIŞOARA

Materialul care urmează conţine probleme în a căror rezolvare se poate folosi o aceeaşi idee.

I. Probleme rezolvate

1. În fiecare vârf al unui poligon regulat cu $2n$ vârfuri este scris un număr întreg astfel încât numerele scrise în două vârfuri vecine să difere mereu prin 1. Numerele care sunt mai mari decât ambii lor vecini se numesc *munţi*, iar cele care sunt mai mici decât ambii lor vecini se numesc *văi*. Arătaţi că suma munţilor minus suma văilor este egală cu n.

Hraskó András, Concusul KöMaL, Ungaria, 2000

Soluţie. Vom fixa un vârf care conţine un munte şi vom parcurge vârfurile poligonului în sensul acelor de ceasornic. După $2n$ paşi ne vom întoarce la vârful de la care am pornit. Despre un pas vom spune că ,,am urcat" dacă pasul a fost făcut dintr-un vârf cu un număr mai mic într-un vârf cu un număr cu 1 mai mare şi vom spune că ,,am coborât" dacă pasul a fost făcut dintr-un vârf cu un număr mai mare într-un vârf cu un număr cu 1 mai mic. Deoarece după $2n$ paşi (de înălţime egală cu 1 fiecare), ne-am întors la ,,înălţimea" iniţială, rezultă că la n dintre paşi am urcat şi la ceilalţi n am coborât. Cum munţii alternează cu văile, avem un număr egal de munţi şi văi. Diferenţa dintre fiecare munte şi valea următoare este cât se coboară. Suma acestor diferenţe este aşadar n.

2. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{n+1} = x_1$ şi $\mid x_{k+1} - x_k \mid \leq 1$ pentru orice $1 \leq k \leq n$. Arătaţi că $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mid x_{k+1} - x_k \mid \leq 2\left[\frac{n}{2}\right]$.

Soluţie. Pornim de la x_1 şi ,,facem paşi" trecând de la x_k la x_{k+1}. După n paşi ne întoarcem de unde am plecat. Spunem despre un pas că ,,a fost în urcare" dacă $x_{k+1} - x_k \geq 0$ şi ,,că a fost în coborâre" dacă $x_{k+1} - x_k < 0$. La pasul k ,,urcăm" sau ,,coborâm" $\mid x_{k+1} - x_k \mid$. Cum la sfârşitul excursei suntem la aceeaşi înălţime ca la început, rezultă că în total urcăm la fel de mult cât şi coborâm. Din n paşi, fie de urcat fie de coborât (cei care sunt mai puţini) sunt cel mult $\left[\frac{n}{2}\right]$ paşi, deci, cum fiecare pas este cel mult 1, facem cel mult $\left[\frac{n}{2}\right]$ în direcţia, sus sau jos, în care facem mai puţini paşi. Facem exact la fel de mult şi în celălalt sens, deci în total, suma variaţiilor de nivel este cel mult $2\left[\frac{n}{2}\right]$.

3.[1] Pe o circumferinţă se scriu 2003 numere cu proprietatea că modulul diferenţei oricăror două numere vecine este constant. Să se arate că toate numerele sunt egale.

Soluţie. Presupunem că nu toate numerele sunt egale. Atunci modulul diferenţei dintre două numere vecine este $m > 0$. Pornim de la un număr şi facem ,,paşi" pe cerc. După 2003 paşi se întoarcem de unde am plecat. Cum toţi paşii au aceeaşi mărime, m, numărul de paşi făcuţi în sus trebuie să fie egal cu numărul de paşi făcuţi în jos, contradicţie cu faptul că numărul total al paşilor este 2003, impar.

4. Se dau n numere $x_1, x_2, ..., x_n \in \{-1, 1\}$ astfel încât $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$. Arătaţi că n este divizibil cu 4.

Soluţie. Diferenţa dintre două numere vecine este -2, 0 sau 2. Relaţia dată ne spune că n este par şi că exact jumătate din termenii sumei sunt -1. Asta înseamna că în trecerea de la un vârf la cel următor în exact $n/2$ treceri facem paşi nenuli, adică de lungime 2 în sus sau de lungime 2 în jos. Deoarece la sfârşit ne întoarcem la ,,înălţimea" iniţială, numărul de paşi în sus este egal cu numărul de paşi în jos, deci $n/2$ este par.

5. Fie $n \geq 2$ şi $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_{n-1} - x_n| + |x_n - x_1| \leq 2n - 3.$$

Arătaţi că cel puţin două dintre numere sunt egale.

Adrian Zahariuc

Soluţie: Să presupunem că numerele sunt distincte. Datorită simetriei circulare putem presupune că $x_1 = \min\limits_{k \in \{1,...,n\}} x_k$ şi fie $x_j = \max\limits_{k \in \{1,...,n\}} x_k$. Numerele fiind distincte, avem că $x_j - x_1 \geq n - 1$. Vizualizând suma din enunţ din nou ca fiind distanţa totală urcată+coborâtă în drumul circular de la valea cea mai joasă la muntele cel mai înalt şi înapoi, adică de la altitudinea x_1 la altitudinea x_j şi înapoi, drumul total parcurs are diferenţa totală de nivel cel puţin $2(x_j - x_1) \geq 2n-2 > 2n-3$, deci suma din enunţ nu poate fi $2n-3$ dacă numerele sunt distincte.

II. Probleme propuse

În încheiere vă invităm să încercaţi să rezolvaţi problemele de mai jos folosind argumente similare.

[1] din cartea *L. Panaitopol, D. Şerbănescu − Probleme de Teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori*, Editura GIL, 2003; o generalizare, cu 2003 înlocuit cu $2n + 1$, a apărut în GM-B, nr. 10/2012, pb. 14401, semnată *George Stoica, Canada*

6. Pe un cerc sunt scrise n numere astfel ca, parcurgând cercul în sensul acelor de ceasornic, fiecare număr să fie cu 1 mai mare mare sau cu 2 mai mic decât precedentul. Demonstraţi că n este divizibil cu 3.

Andrei Eckstein

7. Pe un cerc se scriu 2013 numere naturale nenule distincte. Este posibil ca, în fiecare pereche de numere vecine, dacă împărţim numărul mai mare la numărul mai mic să obţinem mereu un număr prim?

8. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 2$) numere reale din intervalul $[1, 2]$. Demonstraţi că

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \ldots + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

şi că egalitatea are loc dacă şi numai dacă n este par şi $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (1, 2, \ldots, 1, 2)$ sau $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (2, 1, \ldots, 2, 1)$.

test antrenament EGMO, Italia, 2021

BIBLIOGRAFIE

[1] **M. Ghergu** – *Probleme pentru pregătirea olimpiadelor de matematică*, clasele VI-VIII, Editura GIL, 2004

[2] **L. Panaitopol, D. Şerbănescu** – *Probleme de teoria numerelor şi combinatorică pentru juniori*, Editura GIL, 2003

[3] arhiva concursul KöMaL: http://www.komal.hu/verseny/korabbi.e.shtml