BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 3 aprilie 2021 (barajul 2)

Problema 1. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Demonstraţi că

$$xyz(x + y + z) + 2021 \geq 2024xyz.$$

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (a, b) cu proprietatea că

$$(a, b) + [a, b] = 4(a + b) + 2021.$$

Problema 3. Fie $ABCD$ un romb.
a) Arătaţi că în romb se poate înscrie un cerc (c) care să fie tangent laturilor rombului.
b) Punctele F, H, K, I se află pe laturile DC, BC, AB, respectiv DA ale rombului astfel încât segmentele $[KH]$ şi $[IF]$ să fie tangente cercului (c). Arătaţi că punctele F, H, K, I sunt vârfurile unui trapez.

Problema 4. Colorăm fiecare pătrat unitate al unei table de şah 4×19 cu una din culorile roşu, verde şi albastru. Arătaţi că, oricum s-ar face această colorare, putem întotdeauna găsi două linii şi două coloane astfel încât cele patru pătrăţele situate la intersecţiile acestora să fie de aceeaşi culoare.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Fie x, y, z numere reale pozitive astfel încât $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Demonstraţi că

$$xyz(x + y + z) + 2021 \geq 2024xyz.$$

Soluţie:
Din inegalitatea mediilor, $3 = x^2 + y^2 + z^2 \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}$, de unde $xyz \leq 1$.
Tot din inegalitatea mediilor, $xyz(x + y + z) + 2021 = x^2yz + xy^2z + xyz^2 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{2021 \text{ termeni}} \geq 2024 \sqrt[2024]{x^4y^4z^4} \geq 2024xyz$ deoarece $xyz \leq 1$.
Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = y = z = 1$.

Problema 2. Determinaţi toate perechile de numere naturale nenule (a, b) cu proprietatea că

$$(a, b) + [a, b] = 4(a + b) + 2021.$$

Soluţie:
Fie $d = (a, b)$ şi $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a = dx$, $b = dy$. Atunci $(x, y) = 1$ şi $[a, b] = dxy$, reci relaţia din enunţ revine la $d + dxy = 4dx + 4dy + 2021$. Deducem că $d \mid 2021$. Cum $d = 43 \cdot 47$, $d \in \{1, 43, 47, 2021\}$.
• Dacă $d = 1$, atunci $1 + xy = 4x + 4y + 2021$ revine la $(x - 4)(y - 4) = 2036$. Cum $2036 = 2^2 \cdot 509$, şi x, y nu pot fi ambele pare, obţinem variantele $\{x - 4,\ y - 4\} = \{1, 2036\}$, şi $\{x - 4,\ y - 4\} = \{4, 509\}$, adică $\{x, y\} = \{5, 2040\}$ (care nu respectă $(x, y) = 1$) sau $\{x, y\} = \{8, 513\}$ care convine şi conduce la $\{a, b\} = \{8, 513\}$.
• Dacă $d = 43$, atunci $1 + xy = 4x + 4y + 2021$ revine la $1 + xy = 4x + 4y + 47$, deci la $(x - 4)(y - 4) = 62$. Obţinem variantele $\{x - 4,\ y - 4\} = \{1, 62\}$ şi $\{x - 4,\ y - 4\} = \{2, 31\}$ care conduc la $\{x, y\} = \{5, 66\}$ şi $\{x, y\} = \{6, 35\}$. Ambele variante convin şi conduc la $\{a, b\} = \{5 \cdot 43, 66 \cdot 43\}$, respectiv $\{a, b\} = \{9 \cdot 43, 35 \cdot 43\}$.
• Dacă $d = 47$, atunci $1 + xy = 4x + 4y + 2021$ revine la $1 + xy = 4x + 4y + 43$, deci la $(x - 4)(y - 4) = 58$. Obţinem variantele $\{x - 4,\ y - 4\} = \{1, 58\}$ şi $\{x - 4,\ y - 4\} = \{2, 29\}$ care conduc la $\{x, y\} = \{5, 62\}$ şi $\{x, y\} = \{6, 33\}$. A doua variantă nu convine căci $(6, 33) \neq 1$. În cealaltă variantă obţinem soluţiile cu $\{a, b\} = \{5 \cdot 47, 62 \cdot 47\}$.
• Dacă $d = 2021$, atunci $1 + xy = 4x + 4y + 2021$ revine la $1 + xy = 4x + 4y + 1$, deci la $(x - 4)(y - 4) = 16$. Cum x şi y nu pot fi simultan pare, obţinem $\{x - 4,\ y - 4\} = \{1, 16\}$ care conduce la $\{x, y\} = \{5, 20\}$, care nu convine. Aşadar, în acest caz nu avem soluţii.

Problema 3. Fie $ABCD$ un romb.
a) Arătaţi că în romb se poate înscrie un cerc (c) care să fie tangent laturilor rombului.
b) Punctele F, H, K, I se află pe laturile DC, BC, AB, respectiv DA ale rombului astfel încât segmentele $[KH]$ şi $[IF]$ să fie tangente cercului (c). Arătaţi că

punctele F, H, K, I sunt vârfurile unui trapez.

Soluţie:
a) Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor rombului şi $A_1 \in (AB)$, $A_2 \in (BC)$, $A_3 \in (CD)$, $A_4 \in (DA)$ proiecţiile sale pe laturile rombului. Atunci $OA_1 = OA_2 = OA_3 = OA_4 \stackrel{not}{=} R$, deci cercul cu centrul în O şi rază R este înscris în romb şi tangent laturilor acestuia.
b) Dacă notăm $m(\sphericalangle ADC) = 2x$, $m(\sphericalangle DFI) = 2y$ şi $m(\sphericalangle DIF) = 2z$, cum $(FO$ şi $(IO$ sunt bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle CFI$, respectiv $\sphericalangle AIF$, avem că $m(\sphericalangle AIO) = 90^\circ - z = x + y$, $m(\sphericalangle CFO) = 90^\circ - y = x + z$ şi $m(\sphericalangle OAI) = m(\sphericalangle OCF) = 90^\circ - x = y + z$. Deducem că $m(\sphericalangle AOI) = 180^\circ - m(\sphericalangle AIO) - m(\sphericalangle OAI) = x + z$, deci triunghiurile IAO şi OCD sunt asemenea. Deducem că $AI \cdot CF = AO \cdot CO$. Analog se arată că $AK \cdot CH = AO \cdot CO$. Rezultă că $AI \cdot CF = AK \cdot CH$. Cum $\sphericalangle IAK \equiv \sphericalangle HCF$, deducem că $\Delta\, IAK \sim \Delta\, HCF$, deci $\sphericalangle AKI \equiv \sphericalangle CFH$, ceea ce arată că $KI \parallel FH$, deci punctele F, H, K, I sunt vârfurile unui trapez (sau ale unui paralelogram; acest ultim caz nu se poate elimina, F, K, H, I putând fi vârfurile unui dreptunghi).

Problema 4. Colorăm fiecare pătrat unitate al unei table de şah 4×19 cu una din culorile roşu, verde şi albastru. Arătaţi că, oricum s-ar face această colorare, putem întotdeauna găsi două linii şi două coloane astfel încât cele patru pătrăţele situate la intersecţiile acestora să fie de aceeaşi culoare.

Soluţie:
Dacă tabla are 4 linii şi 19 coloane, vom numi *coincidenţă* o pereche neordonată de pătrăţele (diferite) situate pe aceeaşi coloană şi care au aceeaşi culoare. Deoarece pe fiecare coloană sunt 4 pătrăţele de 3 culori, vom acea cel puţin o coincidenţă pe fiecare coloană, deci cel puţin 19 coincidenţe în total. Fiind 6 perechi de linii (1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 3-4), va exista o pereche de linii pe care se află cel puţin 4 coincidenţe. Fiind numai 3 culori, cel puţin două dintre aceste coincidenţe vor viza pătrăţele de aceeaşi culoare. Cele patru pătrăţele sunt cele căutate.