



UPPER.SCHOOL FOR
INTERNATIONAL MATH CONTESTS
2020 - 2021

Secțiunea Juniori
Simulare baraj 2
7 martie 2021
- Subiecte -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Subiecte

Problema 1

Pentru fiecare număr pozitiv întreg n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n . Spunem că n are proprietatea **P** dacă elementele secvenței infinite $n, S(n), S(S(n)), \dots$ sunt toate numere pare și spunem despre un număr n că are proprietatea **I** dacă toate elementele din secvența sunt impare. Demonstrați că pentru numerele întregi $n \in \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$ sunt mai multe numere n cu proprietatea **I** decât cu proprietatea **P**.

Problema 2

Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Știm că perimetrul triunghiului $\triangle ABC$ este egal cu 25, iar $AC = 10$. Un cerc care trece prin punctele I și B intersectează prelungirea laturii AB în punctul M și segmentul (BC) în punctul N , astfel încât $B \in (AM)$. Care este valoarea diferenței $BN - BM$?

Problema 3

Fie $a, b, c > 0$. Arătați că

$$5 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) + 12 \geq 3 \left(\sqrt{\frac{a+8b}{c}} + \sqrt{\frac{b+8c}{a}} + \sqrt{\frac{c+8a}{b}} \right).$$

Problema 4

Fie $n \geq 3$ un număr natural. Fiecare din numerele naturale de la 1 la $2n$ se colorează cu roșu sau cu albastru, jumătate din ele trebuind să fie roșii, iar cealaltă jumătate albastre. Apoi se consideră k , numărul numerelor naturale care se pot scrie ca suma dintre un număr roșu și unul albastru. Aflați cea mai mare valoare posibilă a lui k .

Timp de lucru: 240 de minute.

Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.

Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.