

Stelele Matematicii 2021 — Juniori

Problema 1. Pentru fiecare număr întreg $n \geq 3$, notăm cu s_n suma tuturor numerelor prime strict mai mici decât n . Arătați că există o infinitate de numere întregi $n \geq 3$, astfel încât n și s_n să fie relativ prime.

Problema 2. Fie m și n două numere întregi, $m \geq 3$ și $n \geq 3$. Fiecare celulă a unui tablou cu m linii și n coloane este colorată cu una din două culori, astfel încât:

- (1) Pe fiecare coloană să apară ambele culori; și
- (2) Pe oricare două linii, celulele situate la intersecția cu o coloană să aibă o aceeași culoare, pentru exact k coloane.

Arătați că, dacă m este impar, atunci

$$\frac{n(m-1)}{2m} \leq k \leq \frac{n(m-2)}{m}.$$

Exemplu. Pentru $m = 5$ și $n = 10$, tabelele de mai jos ilustrează cazurile $k = 4$ (stânga) și $k = 6$ (dreapta); $a =$ albastru și $r =$ roșu:

a	a	a	a	r	r	r	r	r	r	a	r	r	r	r	r	a	a	a	a
a	r	r	r	a	a	a	r	r	r	r	a	r	r	r	a	r	a	a	a
r	a	r	r	a	r	r	a	a	r	r	r	a	r	r	a	a	r	a	a
r	r	a	r	r	a	r	a	r	a	r	r	r	a	r	a	a	a	r	a
r	r	r	a	r	r	a	r	a	a	r	r	r	r	a	a	a	a	a	r

Problema 3. Fie ABC un triunghi și fie M mijlocul laturii BC . Simetrica dreptei AM în raport cu bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$, intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctul D . Fie Q , respectiv R , piciorul perpendicularei din D pe dreapta AC , respectiv AB , și fie X un punct pe dreapta QR , diferit de Q și R . Perpendiculara în X pe dreapta DX intersectează dreapta AC , respectiv AB , în punctul V , respectiv W . Arătați că mijlocul segmentului VW este situat pe dreapta BC .

Problema 4. Fie k un număr natural nenul și fie a , b și c numere reale strict pozitive. Arătați că

$$a(1 - a^k) + b(1 - (a + b)^k) + c(1 - (a + b + c)^k) < \frac{k}{k + 1}.$$