UPPER.SCHOOL FOR
INTERNATIONAL MATH CONTESTS
2020 - 2021

Secțiunea Juniori
Simulare baraj 2
7 martie 2021

- Soluții -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Pentru fiecare număr pozitiv întreg n notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n. Spunem că n are proprietatea $\boldsymbol{P}$ dacă elementele secvenței infinite n, $S(n)$, $S(S(n)), \ldots.$ sunt toate numere pare și spunem despre un număr n că are proprietatea $\boldsymbol{I}$ dacă toate elementele din secvența sunt impare. Demonstrați că pentru numerele întregi $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 2021\}$ sunt mai multe numere n cu proprietatea $\boldsymbol{I}$ decât cu proprietatea $\boldsymbol{P}$.

IberoAmerican - 2017

Demonstrație.
Notăm cu $S_k(n) = \underbrace{S(S(S...(S(n)...))}_{k \text{ ori}}$. Dacă n este număr par atunci n nu are ultima cifră 9 de unde obținem $S(n+1) = S(n)+1$. Vom demonstra prin inducție după k că $S_k(n+1) = S_k(n)+1$ pentru fiecare număr n cu proprietatea $\boldsymbol{P}$. Pasul inițial: k=1
Dacă n este număr par atunci $S(n+1) = S(n) + 1$.
Pasul inductiv: presupunem propoziția adevărată pentru k și vom demonstra că este adevărată pentru $k + 1$.
$S_{k+1}(n+1) = S(S_k(n+1)) = S(S_k(n)+1) = S(S_k(n))+1 = S_{k+1}(n)+1 \implies S_k(n+1) = S_k(n)+1$ oricare ar fi numărul $k \in \mathbb{N}$ pentru un n fixat cu proprietatea $\boldsymbol{P}$. Deci, dacă n are proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci $n + 1$ are proprietatea $\boldsymbol{I}$. Formăm perechile $(2k, 2k + 1)$ pentru $k \in \{1, 2, \cdots, 1010\}$. Dacă $2k$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ atunci $2k+1$ are proprietatea $\boldsymbol{I}$. Așadar, pentru o astfel de pereche dacă numărul par are proprietatea $\boldsymbol{P}$ atunci și numărul impar din pereche are proprietatea $\boldsymbol{I}$. Este posibil ca pentru anumite valori numărul impar să aibă proprietatea $\boldsymbol{I}$ fără ca numărul par din perechea corespunzătoare să aibă proprietatea $\boldsymbol{P}$. Dar numărul 1 nu face parte din nicio pereche și are proprietatea $\boldsymbol{I}$. Prin urmare numărul numerelor cu proprietatea $\boldsymbol{I}$ este strict mai mare decât numărul numerelor cu proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Barem:

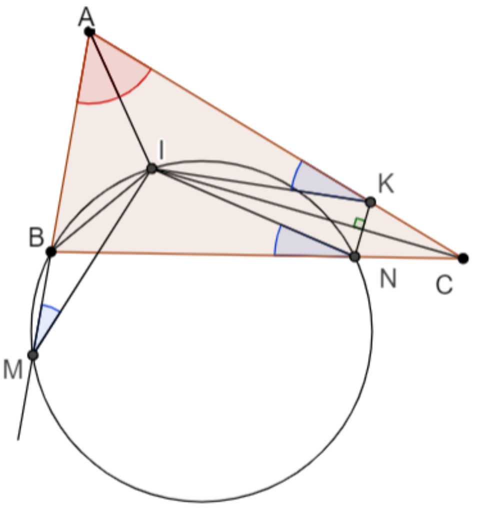
- Enunță că pentru numerele pare are loc $S(n + 1) = S(n) + 1$ . . . . $1p$
- Demonstrează prin inducție (sau prin oricare alta metodă) că pentru n număr par are loc $S_k(n + 1) = S_k(n) + 1$. . . . . $4p$
- Enunță că în orice pereche de numere consecutive $(2k, 2k + 1)$ in care $2k$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ atunci și $2k + 1$ are proprietatea $\boldsymbol{I}$. . . . . $2p$

□

Problema 2

Fie I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$. Știm că perimetrul triunghiului $\triangle ABC$ este egal cu 25, iar $AC = 10$. Un cerc care trece prin punctele I și B intersectează prelungirea laturii AB în punctul M și segmentul (BC) în punctul N, astfel încât $B \in (AM)$. Care este valoarea diferenței $BN - BM$?

Demonstrație.



Fie K simetricul punctului N față de dreapta CI. Evident, $K \in (AC)$ și CI este mediatoarea segmentului NK). Triunghiurile $\triangle CNK$ si $\triangle IKN$ sunt isoscele de bază $(KN) \implies \angle CKN \equiv \angle CNK$ și $\angle IKN \equiv \angle INK$. Din aceste congruențe obținem și că $\angle INB \equiv \angle IKA$. Pe de altă parte punctele M, B, I, N sunt conciclice de unde rezultă că $\angle INB \equiv \angle IMB$. Pentru că $(AI$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC \implies \angle MAI \equiv \angle KAI$. Am obținut astfel că $\triangle MAI \equiv \triangle KAI \implies AM = AK$. Astfel, $BN - BM = BC - CN - (AM - AB) = BC + AB - CK - AK = AB + BC + AC - 2AC = 25 - 20 = 5$.

Barem:

- Construiește simetricul punctului N față de CI . . . . $2p$
- Demonstrează că $AM = AK$ . . . . $3p$
- Exprimă diferența $BN - BM$ în funcție de laturile trinughiului $\triangle ABC$. . . . . $2p$

□

Problema 3

Fie $a, b, c > 0$. Arătaţi că

$$5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+12 \geq 3\left(\sqrt{\frac{a+8b}{c}}+\sqrt{\frac{b+8c}{a}}+\sqrt{\frac{c+8a}{b}}\right).$$

Profesor Mihaela Berindeanu

Demonstraţie.

Se aplică de trei ori inegalitatea mediilor.

$$\frac{a}{b}+\frac{8b}{b}+\frac{9b}{c}=\frac{a+8b}{b}+\frac{9b}{c} \geq 2\sqrt{\frac{(a+8b)\cdot 9b}{bc}} \Rightarrow$$

$$\frac{a}{b}+8+\frac{9b}{c} \geq 6\sqrt{\frac{a+8b}{c}} \tag{1}$$

Analog

$$\frac{b}{c}+8+\frac{9c}{a}\geq 6\sqrt{\frac{b+8c}{a}} \tag{2}$$

$$\frac{c}{a}+8+\frac{9a}{b}\geq 6\sqrt{\frac{c+8a}{b}} \tag{3}$$

Adunăm relaţiile (1)+(2)+(3) și obţinem

$$10\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)+24\geq 6\left(\sqrt{\frac{a+8b}{c}}+\sqrt{\frac{b+8c}{a}}+\sqrt{\frac{c+8a}{b}}\right)$$

După simplificarea cu 2 se obţine inegalitatea din enunţ.
Egalitatea se atinge pentru $a=b=c$

Barem:

- Aplică metoda spargerii . . . . $1p$
- Aplică inegalitatea mediilor . . . . $5p$
- Finalizează . . . . $1p$

$\square$

Problema 4

Fie $n\geq 3$ un număr natural. Fiecare din numerele naturale de la 1 la $2n$ se colorează cu roșu sau cu albastru, jumătate din ele trebuind să fie roșii, iar cealaltă jumătate albastre. Apoi se consideră k, numărul numerelor naturale care se pot scrie ca suma dintre un număr roșu și unul albastru. Aflați cea mai mare valoare posibilă a lui k.

Demonstraţie.
Răspunsul este $4n-5$. Cu numerele date, sunt posibile sume de la 3 la $4n-1$, adică $4n-3$ sume. Presupunem că s-ar putea obține mai multe, adică cel mult una dintre sumele posibile nu se obține. Dacă ea este *mare* ($\geq 2n+1$), atunci, pentru a se obține toate sumele de la 3 la $2n$ trebuie ca 1 să fie de o culoare, iar numerele $2,3,\ldots,2n-1$ să fie de cealaltă culoare. (Dacă 1 și 2 sunt de aceeași culoare, nu obținem suma 3. Dacă $j>1$ este cel mai mic număr care are culoarea lui 1, nu putem obține suma $j+1$.) Dar atunci avem deja $2n-2>n$ numere de o anumită culoare. La fel, dacă s-ar obține toate sumele de la $2n+2$ la $4n-1$, atunci $2n$ și $2n-1$ trebuie să aibă culori diferite, iar dacă j este cel mai mare număr care este mai mic decât $2n$ și are aceeași culoare cu acesta, atunci $j=1$, altminteri suma $2n+j$ nu se obține. Din nou, am ajuns la o contradicție. Așadar, se pot obține cel mult $4n-5$ sume.
Un exemplu de colorare care produce $4n-5$ sume:
Colorăm cu roșu numerele $2,3,\ldots,n,2n$ și cu albastru celelalte. Obținem sumele (primul termen este roșu, al doilea albastru): $2+1,3+1,\ldots,n+1$, nu îl obținem pe $n+2$, apoi $2+(n+1),3+(n+1),\ldots,n+(n+1),n+(n+2),n+(n+3),\ldots,n+(2n-1)$, nu îl obținem pe $3n$, apoi $2n+(n+1),2n+(n+2),\ldots,2n+(2n-1)$.
Un alt exemplu de colorare:
Colorăm cu roșu numerele pare, cu albastru cele impare, apoi schimbăm culoarea numerelor 1 și $2n$. Obținem sumele impare: $3+2,5+2,\ldots,(2n-1)+2,(2n-1)+4,\ \ldots,(2n-1)+(2n-2)$ (nu obțin 3 și $4n-1$). Obținem toate sumele pare: $3+1,\ 5+1,\ldots,(2n-1)+1,2n+2,2n+4,\ldots,2n+(2n-2)$

Barem:

- Demonstrează că cel puțin două numere nu se pot obține .... $4p$
- Construiește un exemplu .... $3p$

$\square$

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.