Problema săptămânii 240

Într-un oraş sunt trei licee. În fiecare liceu învaţă n elevi. Fiecare elev din fiecare liceu cunoaşte $n+1$ elevi de la celelalte licee. Demonstraţi că se pot alege trei elevi, câte unul de la fiecare liceu, astfel încât cei trei elevi să se cunoască între ei.

baraj OIM, Franţa, 2002

Soluţie: Fie k numărul maxim de elevi de la un acelaşi liceu pe care un elev îi cunoaşte. Să zicem că elevul E de la liceul A cunoaşte k elevi de la liceul B. Atunci el cunoaşte $n+1-k \geq 1$ elevi de la liceul C. Alegem unul dintre aceştia. Dacă el cunoaşte vreunul din cei k elevi de la liceul B pe care îi cunoaşte E, problema este rezolvată.
Dacă el nu cunoaşte niciunul din aceşti k elevi, atunci el cunoaşte cel mult $n-k$ elevi de la liceul B, deci cel puţin $(n+1)-(n-k)=k+1$ elevi de la liceul A, lucru care contrazice maximalitatea lui k.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, David Ştefan Toader, Cezara Danciu, Emanuel Mazăre* şi *Ana Duguleanu.*

Problem of the week no. 240

In a town there are three schools. Each of them has n students. Every student, from every school, knows $n+1$ students from the other two schools. (Acquaintances are mutual.) Prove that there exist three students, one from each school, that know each other.

IMO selection test, France, 2002

Solution: Let k be the largest number of acquaintances that a student has in one school. Pick E a student from, say school A, that has k acquaintances at a school B. Then E has $n+1-k \geq 1$ acquaintances in school C. Pick one of them. If this student knows any of the k students from school B that E knows, we are done. If the student from school C doesn't know any of the k students from school B that E knows, then he has at most $n-k$ acquaintances in school B, which leaves at least $(n+1)-(n-k)=k+1$ acquaintances in school A. This, however, contradicts the choice of k.