Problema săptămânii 239

Fie n un număr natural. Arătaţi că scrierea în baza 2 a numărului $n(2^n-1)$ conţine exact n cifre de 1.

test EGMO, Franţa, 2021

Soluţia 1: (oficială)
Fie $s_n = n(2^n - 1)$. Deoarece $s_0 = 0$ şi $s_1 = 1$, afirmaţia din enunţ este verificată pentru $n \leq 1$. Presupunem de acum că $n \geq 2$. Fie $t = 2^n - n$ şi $s = n - 1$, astfel că $n(2^n - 1) = 2^n \cdot s + t$ şi $s + t = 2^n - 1$. Prin inducţie rezultă că $2^n > n + 1$. Astfel, s şi t sunt numere naturale nenule cu suma $2^n - 1$. În consecinţă, ele se scriu în baza 2 drept $s = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0}_{(2)}$ şi $t = \overline{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0}_{(2)}$, unde $a_i + b_i = 1$ pentru orice $i \leq n - 1$. (Pentru comoditate, completăm scrierea în baza 2 a unuia dintre numerele s şi t cu 0-uri nesemnificative înaintea primei cifre de 1.) Cum $t < 2^n$, scrierea în baza 2 a lui $2^n \cdot s + t$ începe cu cele n cifre ale lui s, urmate de cele n cifre ale lui t. Numărul $n(2^n - 1) = 2^n \cdot s + t$ se scrie deci $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_1a_0b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1b_0}_{(2)}$ în baza 2. Suma cifrelor sale este atunci $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1}) = n$, de unde concluzia.

Soluţie şi generalizare (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Fie a, b, n numere naturale, $b, n \geq 2$, $a < b^n$, $N = a(b^n - 1)$ şi $s(N)$ suma cifrelor lui N în baza b. Atunci $s(N) = n(b - 1)$.
Într-adevăr, fie $\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0}$ reprezentarea în baza b a numărului $a - 1$. Din $N = (a-1)b^n + (b^n - 1) - (a - 1)$, rezultă că reprezentarea în baza b a lui N este

$$N_{(b)} = \overline{a_k \ldots a_0 \underbrace{(b-1)\ldots(b-1)}_{n-k-1 \text{ cifre}}(b-1-a_k)\ldots(b-1-a_0)},$$

astfel că

$$s(N) = (a_k+\ldots+a_0)+(n-k-1)(b-1)+(k+1)(b-1)-(a_k+\ldots+a_0) = n(b-1).$$

Pentru $a = n$, $b = 2$, se obţine rezultatul cerut.

Remarcă: Variante mai simple ale acestei probleme, în care baza în cauză este baza 10, sunt bine cunoscute la nivelul clasei a V-a. De exemplu:

Fie n un număr de două cifre. Aflaţi suma cifrelor numărului $99n$.

Am primit soluţii de la: *Corneliu Mănescu-Avram, Ana Duguleanu, Cezara Danciu* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 239

Let n be a positive integer. Prove that the base 2 representation of the number $n(2^n-1)$ contains exactly n digits equal to 1.

EGMO selection test, France, 2021

Official solution:
Put $s_n = n(2^n-1)$. As $s_0 = 0$ and $s_1 = 1$, the statement checks for $n \leq 1$. From now on, assume $n \geq 2$. Put $t = 2^n - n$ and $s = n-1$. We have $n(2^n-1) = 2^n \cdot s + t$ and $s+t = 2^n-1$. By induction, $2^n > n+1$. Thus, s and t are positive integers whose sum is 2^n-1. Their base 2 representation is $s = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0}_{(2)}$ and $t = \overline{b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0}_{(2)}$, where $a_i + b_i = 1$ for all $i \leq n-1$. As $t < 2^n$, the base 2 representation of $2^n \cdot s + t$ begins with the n digits of s, followed by the n digits of t. The base 2 representation of the number $n(2^n-1) = 2^n \cdot s + t$ is $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0}_{(2)}$. The sum of its digits is $(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\dots+(a_{n-1}+b_{n-1}) = n$, which is what we wanted to prove.

Solution and extension (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Let a, b, n be positive integers, $b, n \geq 2$, $a < b^n$, $N = a(b^n-1)$ and denote by $s(N)$ the sum of the digits of N in base b. We claim that $s(N) = n(b-1)$.
Indeed, let $\overline{a_ka_{k-1}\dots a_1a_0}$ be the base b representation of the number $a-1$. From $N = (a-1)b^n + (b^n-1) - (a-1)$, it follows that the base b representation of N is

$$N_{(b)} = \overline{a_k \dots a_0 \underbrace{(b-1)\dots(b-1)}_{n-k-1 \text{ digits}}(b-1-a_k)\dots(b-1-a_0)},$$

hence

$$s(N) = (a_k+\dots+a_0)+(n-k-1)(b-1)+(k+1)(b-1)-(a_k+\dots+a_0) = n(b-1).$$

For $a = n$, $b = 2$, we obtain the statement of the problem.