Problema săptămânii 237

În triunghiul oarecare ABC notăm cu D punctul de intersecţie a perpendicularei duse prin punctul A pe latura $[AB]$ cu perpendiculara dusă prin punctul C pe latura $[AC]$, iar cu E punctul de intersecţie a perpendicularei duse prin punctul A pe latura $[AC]$ cu perpendiculara dusă prin punctul B pe latura $[AB]$. Arătaţi că înălţimea dusă din vârful A al triunghiului ADE este simediană în triunghiul ABC.

Michel Bataille, Crux Mathematicorum nr. 1/2021

SOLUŢIE (*Mihai Miculiţa*): Notând cu $P := pr_{DE}(A)$ şi cu $T-$acel punct al dreptei AP, pentru care avem $BT \cap \odot ABC = \{B\}$ (adică dreapta $BT-$este tangenta dusă prin punctul B, la cercul $\odot ABC$) (v.Fig.), <u>problema revine acum a mai arăta acum, că</u>: $\boxed{CT \cap \odot ABC = \{C\}}$!

Intrucât două unghiuri de acelaşi fel (ambele ascuţite sau obtuse), care au laturile respectiv perpendiculare, sunt congruente, din faptul că:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} BE \perp AB\,(ip) \\ AE \perp AC\,(ip) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AEB} \equiv \underline{\widehat{CAB}} \\ BT \cap \odot ABC = \{B\}\,(ca) \Rightarrow \widehat{CBT} \equiv \underline{\widehat{CAB}} \\ \left.\begin{array}{r} AD \perp AB\,(ip) \\ AC \perp CD\,(ip) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CDA} \equiv \underline{\widehat{CAB}} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{AEB} \equiv \widehat{CBT} \equiv \widehat{CDA} \equiv \widehat{CAB}. \quad (1)$$

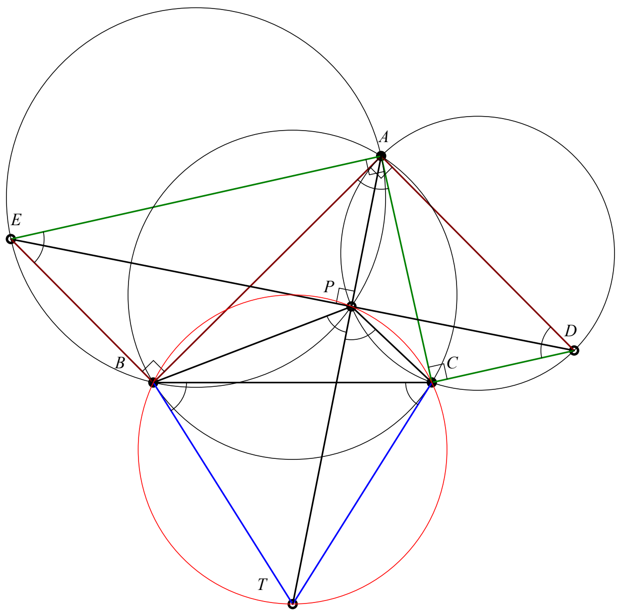
Pe de altă parte, din: $\left.\begin{array}{r} AP \perp DE\,(ip) \\ CD \perp AC\,(ip) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{APD} \equiv \widehat{ACD} \Rightarrow APCD - inscriptibil \Rightarrow \widehat{CPT} \equiv \widehat{CDA} \quad (2)$

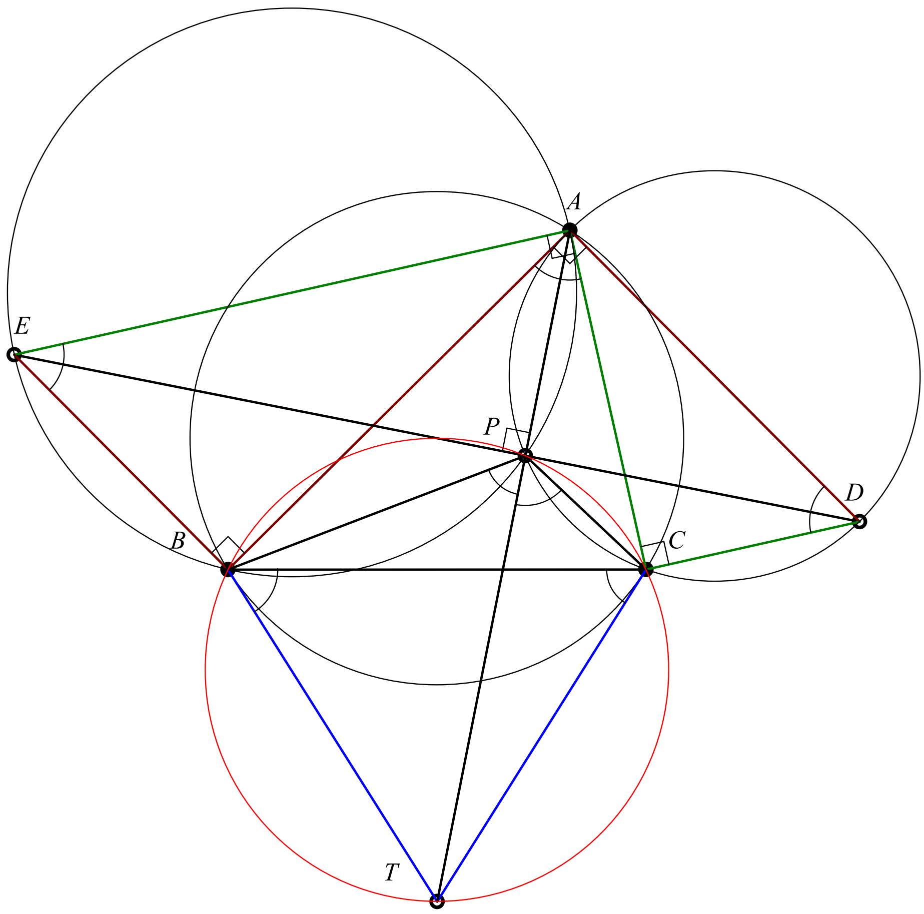
şi în mod analog arătăm că: $ABEP - inscriptibil \Rightarrow \widehat{TPB} \equiv \widehat{AEB}. \quad (3)$

În fine, din relaţiile (1) şi (2), rezultă:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \widehat{CBT} \equiv \widehat{CDA}\,(1) \\ \widehat{CPT} \equiv \widehat{CDA}\,(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{CBT} \equiv \widehat{CPT} \Rightarrow PBTC - inscriptibil \Rightarrow \widehat{TCB} \equiv \underline{\underline{\widehat{TPB}}} \\ \underline{\underline{\widehat{TPB}}} \overset{(3)}{\equiv} \widehat{AEB} \overset{(1)}{\equiv} \widehat{CAB} \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{TCB} \equiv \widehat{CAB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{TC \cap \odot ABC = \{C\}}. \blacksquare$$





Soluţia 2: (*Elisa Ipate*)
Tratăm numai cazul în care $m(\sphericalangle A) < 90°$, celălalt caz fiind analog.
Fie $AP \perp DE$, $P \in DE$. Patrulaterele $APCD$ şi $APBE$ sunt inscriptibile. În plus, $AD \parallel BE$ şi $AE \parallel CD$, deci avem $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle BEP \equiv \sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ACP$. Analog se arată că $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle ABE$. Deducem că P este punctul A-Dumpty[1] în triunghiul ABC, deci este situat pe simediana din A.

Am primit soluţii de la: *David Ghibu, Cezara Danciu, Elisa Ipate, Andrei Pană, Emanuel Mazăre, Ana Duguleanu, Ştefan Gobej* şi *Ana Boiangiu.*

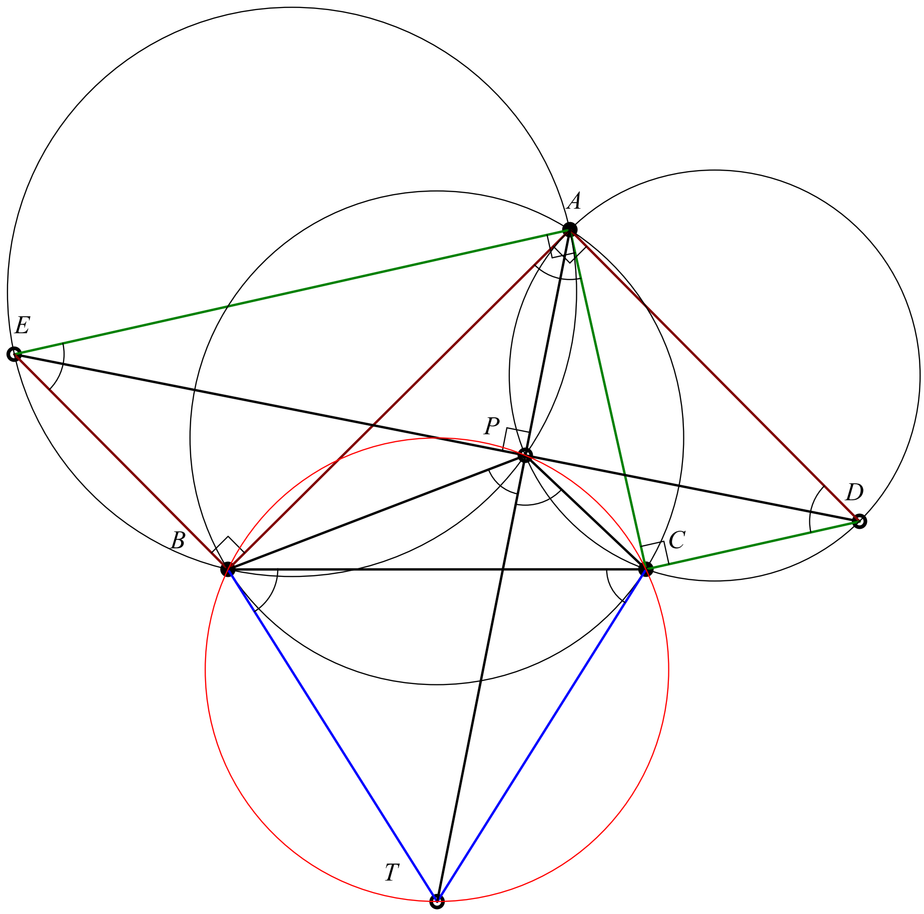
[1]vezi articolul On two special points in triangle

Problem of the week no. 237

Let ABC be a triangle. The perpendiculars to AB through A and to AC through C intersect at D. The perpendiculars to AC through A and to AB through B intersect at E. Prove that the altitude from A in triangle DAE is a symmedian of triangle ABC.

Michel Bataille, Crux Mathematicorum no. 1/2021

Solution: (*Elisa Ipate*)
We only treat the case $m(\sphericalangle A) < 90°$, the other case being similar.
Let $AP \perp DE$, $P \in DE$. Quadrilaterals $APCD$ and $APBE$ are cyclic. Moreover, $AD \parallel BE$ and $AE \parallel CD$, therefore $\sphericalangle BAP \equiv \sphericalangle BEP \equiv \sphericalangle ADP \equiv \sphericalangle ACP$. Similarly, $\sphericalangle CAE \equiv \sphericalangle ABE$. It follows that P is the A-Dumpty point[2] of triangle ABC, which means that it lies on the symmedian from A.



[2]see On two special points in triangle