

BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 13 martie 2021 (barajul 1)

Problema 1. Găsiți toate perechile de numere prime (p, q) care verifică ecuația

$$5pq^2 + p = q^3 + 15p^3 + 7.$$

Problema 2. Se dau numerele reale pozitive x, y, z, t astfel încât $xy = 1$ și $zt = 1$. Dacă A, B sunt numerele $A = (x + z)(y + z)(x + t)(y + t)$, $B = (xt + yz)(xz + yt)$, găsiți valoarea minimă posibilă a diferenței $A - B$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram și O punctul de intersecție a diagonalelor sale. Paralelele din punctele C și D la BD , respectiv AC , se intersectează în punctul P . Dreapta BP intersectează AC și CD în punctele K și respectiv Z . Dacă R este punctul de intersecție a dreptelor CP și DK , demonstrați că:

- (a) dreapta RZ trece prin mijlocul lui $[DP]$;
- (b) $DZ = 2CZ$.

Problema 4. Doi copii, Nicholas și George, joacă un joc în care câștigătorul ia x puncte, iar pierzătorul ia y puncte, unde x și y sunt numere întregi nenegative, $x > y$. Să presupunem că în fiecare joc unul dintre copii câștigă, iar celălalt pierde. După ce s-au jucat câteva jocuri, Nicholas a adunat în total 147 de puncte, iar George a adunat în total 123 de puncte totale. Aflați x și y știind că George a câștigat 6 jocuri.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute