BARAJ DE JUNIORI „Euclid”
Cipru, 13 martie 2021 (barajul 1)

Problema 1. Găsiți toate perechile de numere prime (p, q) care verifică ecuația

$$5pq^2 + p = q^3 + 15p^3 + 7.$$

Problema 2. Se dau numerele reale pozitive x, y, z, t astfel încât $xy = 1$ și $zt = 1$. Dacă A, B sunt numerele $A = (x + z)(y + z)(x + t)(y + t)$, $B = (xt + yz)(xz + yt)$, găsiți valoarea minimă posibilă a diferenței $A - B$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O punctul de intersecție a diagonalelor sale. Paralelele din punctele C şi D la BD, respectiv AC, se intersectează în punctul P. Dreapta BP intersectează AC şi CD în punctele K și respectiv Z. Dacă R este punctul de intersecție a dreptelor CP și DK, demonstrați că:
(a) dreapta RZ trece prin mijlocul lui $[DP]$;
(b) $DZ = 2CZ$.

Problema 4. Doi copii, Nicholas și George, joacă un joc în care câștigătorul ia x puncte, iar pierzătorul ia y puncte, unde x şi y sunt numere întregi nenegative, $x > y$. Să presupunem că în fiecare joc unul dintre copii câștigă, iar celălalt pierde. După ce s-au jucat câteva jocuri, Nicholas a adunat în total 147 de puncte, iar George a adunat în total 123 de puncte totale. Aflaţi x şi y ştiind că George a câștigat 6 jocuri.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute

Soluţii neoficiale:

Problema 1. Găsiți toate perechile de numere prime (p, q) care verifică ecuația

$$5pq^2 + p = q^3 + 15p^3 + 7.$$

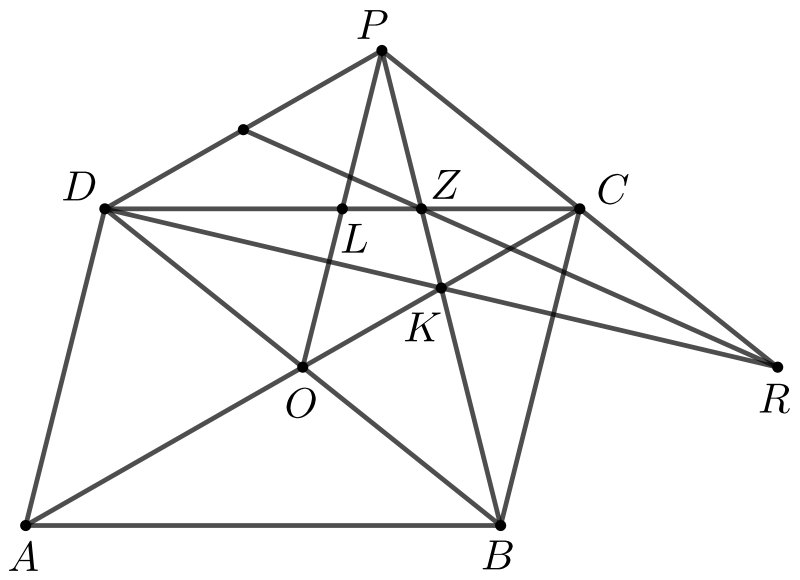
Soluţie: Dacă p şi q sunt impare, $5pq^2 + p$ este par, în timp ce $q^3 + 15p^3 + 7$ este impar, deci nu putem avea egalitate. Deducem că $p = 2$ sau $q = 2$.
• Dacă $p = 2$, ecuaţia revine la $10q^2 = q^3 + 125$. Cum $5 \mid 10q^2$ şi $5 \mid 125$, deducem $5 \mid q^3$, deci $q = 5$, care chiar verifică ecuaţia, deci $p = 2$, $q = 5$ este o soluţie.
• Dacă $q = 2$, ecuaţia revine la $21p = 15p^3 + 15$. Ca mai sus rezultă $p = 5$, dar $p = 5$ nu verifică ecuaţia $21p = 15p^3 + 15$, deci în acest caz nu avem soluţii.
Singura soluţie este $p = 2$, $q = 5$.

Problema 2. Se dau numerele reale pozitive x, y, z, t astfel încât $xy = 1$ și $zt = 1$. Dacă A, B sunt numerele $A = (x + z)(y + z)(x + t)(y + t)$, $B = (xt + yz)(xz + yt)$, găsiți valoarea minimă posibilă a diferenței $A - B$.

Soluţie: Avem $A = (x+z)(y+t)(x+t)(y+z) = (xy+xt+yz+zt)(xy+xz+yt+zt) = (2 + xt + yz)(2 + xz + yt) = 4 + 2(xt + yz + xz + yt) + (xt + yz)(xz + yt) = 4+2(xt+yz+xz+yt)+B \geq 4+2\cdot 4\sqrt[4]{xt \cdot yz \cdot xz \cdot yt}+B = 4+8\sqrt{xy \cdot zt}+B = 12+B$, deci $A - B \geq 12$.
Pe de altă parte, pentru $x = y = z = t = 1$ (care respectă condiţiile din enunţ), avem $A - B = 12$, deci valoarea 12, fiind atinsă, este într-adevăr valoarea minimă a diferenţei $A - B$.

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi O punctul de intersecție a diagonalelor sale. Paralelele din punctele C şi D la BD, respectiv AC, se intersectează în punctul P. Dreapta BP intersectează AC şi CD în punctele K și respectiv Z. Dacă R este punctul de intersecție a dreptelor CP și DK, demonstrați că:
(a) dreapta RZ trece prin mijlocul lui $[DP]$;
(b) $DZ = 2CZ$.

Soluţie: (vezi figura pe pagina următoare)
(a) $PDOC$ este paralelogram, deci şi $POBC$ este paralelogram. Atunci K este mijlocul lui $[CO]$. Dacă $\{L\} = PO \cap CD$, $[CL]$ şi $[PK]$ sunt mediane în triunghiul CPO, deci Z este centrul de greutate. În fine, $CK \parallel PD$ şi $PD = CO = 2CK$ arată că $[CK]$ este linie mijlocie în triunghiul RPD, deci K este mijlocul lui $[RD]$. Aşadar, Z este acel punct de pe mediana $[PK]$ a triunghiului RPD care e la două treimi de vârful P şi la o treime de mijlocul laturii opuse, deci Z este centrul de greutate al triunghiului RPD. Deducem că RZ trece prin mijlocul laturii $[DP]$.
(b) $[DC]$ este cea de-a treia mediană a triunghiului RPD, deci $DZ = 2CZ$.



Problema 4. Doi copii, Nicholas și George, joacă un joc în care câștigătorul ia x puncte, iar pierzătorul ia y puncte, unde x şi y sunt numere întregi nenegative, $x > y$. Să presupunem că în fiecare joc unul dintre copii câștigă, iar celălalt pierde. După ce s-au jucat câteva jocuri, Nicholas a adunat în total 147 de puncte, iar George a adunat în total 123 de puncte totale. Aflaţi x şi y ştiind că George a câștigat 6 jocuri.

Soluţie: Fie a numărul de jocuri câştigate de Nicholas. Atunci Nicholas a adunat $ax + 6y = 147$ de puncte, în timp ce George a acumulat $6x + ay = 123$ de puncte. Adunând cele două ecuaţii, obţinem $(a+6)(x+y) = 270$, deci $a+6 \mid 270$. Scăzând cele două ecuaţii obţinem $(a - 6)(x - y) = 24$, deci $a - 6 \mid 24$. În plus, cum $x - y > 0$, deducem că $a > 6$. De aici rezultă $a - 6 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, deci $a \in \{7, 8, 9, 10, 12, 14, 18, 30\}$. Din $a + 6 \mid 270$ rezultă $a \in \{9, 12\}$. Dar a par ar implica $6x + ay$ par, ceea ce nu convine. Deci $a = 9$. De aici se determină imediat x şi y. Se obţine $x = 13$, $y = 5$.