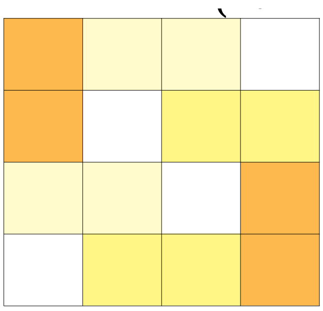
Problema săptămânii 236

Ne propunem să plasăm dominouri pe o tablă de şah $n \times n$ astfel încât fiecare domino să acopere exact două dintre pătrăţelele unitate ale tablei, să nu se suprapună şi să lase neacoperit exact un pătrăţel unitate de pe fiecare linie şi fiecare coloană a tablei. Pentru care valori $n \geq 2$ putem plasa dominourile?

Vermont State Mathematics Coalition Talent Search, 2015, Crux Mathematicorum nr. 10/2020

Puteţi consulta soluţia din *Crux Mathematicorum* aici.

Soluţia 1: (*Ana Duguleanu*)
Vom demonstra că numerele n căutate sunt cele care dau restul 0 sau 1 la împărţirea cu 4. Mai întâi vom arăta că dacă $4 \equiv 0, 1 \pmod 4$, atunci putem plasa dominouri astfel încât să rămână exact un pătrăţel neacoperit pe fiecare linie şi pe fiecare coloană.
Pentru $n = 4$ putem aşeza dominourile ca mai jos.



Pentru $n = 4k$, împărţim tabla în k^2 pătrate 4×4. În pătratele 4×4 situate pe una din diagonale plasăm câte 6 dominouri, ca în figura de mai sus. Celelalte pătrate 4×4 le pavăm cu câte 8 dominouri.
Pentru $n = 4k + 1$ procedăm în felul următor: împărţim pătratul într-un pătrat $4k \times 4k$ situat în colţul din stânga sus, un pătrat 1×1 în colţul din dreapta jos şi două dreptunghiuri $1 \times 4k$. În pătratul $4k \times 4k$ plasăm dominouri astfel încât pe fiecare linie şi fiecare coloană să rămână exact un pătrăţel necompletat. Dreptunghiurile $1 \times 4k$ le pavăm cu dominouri, iar pătratul din colţul din dreapta jos rămâne gol. Astfel, pe fiecare linie şi coloană a tablei $n \times n$ vom avea exact un pătrat unitate neacoperit.

În continuare arătăm că dacă $n \equiv 2, 3 \pmod 4$, nu se pot plasa dominourile ca în enunţ. Numerotăm liniile şi coloanele, în ordine, de la 1 la n. Fiecare pătrat unitate va avea două coordonate, i, numărul liniei, şi j, numărul coloanei pe care se află, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Suma coordonatelor tuturor pătratelor este $n(1 + 2 + \ldots + n) + n(1 + 2 + \ldots + n) = n^2(n + 1)$, adică un număr par. Suma coordonatelor pătrăţelelor eliminate este (avem câte unul pe fiecare linie şi coloană!) $1 + 2 + \ldots + n + 1 + 2 + \ldots + n = n(n + 1)$, tot un număr par. Atunci suma coordonatelor pătrăţelelor acoperite cu dominouri este tot un număr par. Dar suma coordonatelor celor două pătrăţele acoperite de un domino este mereu impară (dacă dominoul este plasat orizontal, pe linia i şi coloanele j şi $j+1$, suma coordonatelor este $2i+2j+1$; analog dacă dominoul este plasat vertical). Pentru ca suma coordonatelor dominourilor să fie pară, avem nevoie să plasăm un număr par de dominouri. Însă avem de acoperit n^2-n pătrate, cu $\dfrac{n(n-1)}{2}$ dominouri, iar $\dfrac{n(n-1)}{2}$ este număr par numai pentru $n \equiv 0,1 \pmod 4$. Aşadar, plasarea convenabilă a dominourilor este posibilă numai în aceste cazuri.

Soluţia 2: (*Radu Şerban*)
Ca mai sus, se arată că în cazurile $n \equiv 0 \pmod 4$ şi $n \equiv 1 \pmod 4$ se pot aşeza convenabil dominourile.

Dacă $n = 4k+2$, colorăm tabla pe benzi verticale. Jumătate din numărul total de pătrăţele devin astfel negre, jumătate rămân albe. Dintre cele $4k+2$ pătrăţele care nu vor fi acoperite de dominouri, $2k+1$ se află coloane negre, $2k+1$ pe coloane albe. Orice domino plasat orizontal acoperă în mod egal pătrăţele albe şi negre (câte unul). Aşadar, suprafaţa neagră acoperită în total de dominourile plasate vertical trebuie să fie egală cu suprafaţa albă acoperită în total de dominourile plasate vertical. Deducem că numărul total de dominouri plasate vertical trebuie să fie par.
Colorând acum tabla pe benzi orizontale deducem în mod analog că numărul dominourilor plasate orizontal trebuie să fie şi el par. Aşadar, numărul total de dominouri trebuie să fie par. Dar acesta este $\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$, adică impar.

Dacă $n = 4k+3$, colorăm tabla pe benzi verticale. Vom avea $(2k+1)(4k+3)$ pătrăţele albe şi $(2k+2)(4k+3)$ pătrăţele negre. Dintre cele $4k+3$ pătrăţele care nu vor fi acoperite de dominouri, $2k+2$ se află coloane negre, $2k+1$ pe coloane albe. Aşadar, dominourile trebuie să acopere $(2k+1)(4k+2)$ pătrate albe şi $(2k+2)(4k+2)$ pătrate negre. Orice domino plasat orizontal acoperă în mod egal pătrăţele albe şi negre (câte unul). Aşadar diferenţa dintre suprafaţa neagră acoperită în total de dominourile plasate vertical şi suprafaţa albă acoperită în total de dominourile plasate vertical este $(2k+2)(4k+2)-(2k+1)(4k+2) = 4k+2$. Deducem că numărul total de dominouri plasate vertical pe benzile negre trebuie să fie cu $2n+1$ mai mare decât numărul dominourilor plasate vertical pe coloanele albe. Conchidem că numărul total de dominouri verticale trebuie să fie impar.
Colorând acum tabla pe benzi orizontale deducem în mod analog că numărul dominourilor plasate orizontal trebuie să fie şi el impar. Aşadar, numărul total de dominouri trebuie să fie par. Dar acesta este $\dfrac{n(n-1)}{2} = (4k+3)(2k+1)$, adică impar.

Am primit soluţii de la: *Emanuel Mazăre, Ana Duguleanu* şi *Radu Şerban.*

Problem of the week no. 236

We want to place dominoes on an $n \times n$ board such that each domino covers exactly two unit squares of the board, dominoes don't overlap and they leave exactly one unit square uncovered on each row and each column. For which values of $n \geq 2$ is this possible?

Vermont State Mathematics Coalition Talent Search, 2015, Crux Mathematicorum nr. 10/2020

For the solution posted in *Crux Mathematicorum*, see here.