Problema săptămânii 235

Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, notăm cu $p(n)$ cel mai mic divizor prim al lui n. Demonstraţi că dacă două numere naturale mai mari ca 1 satisfac relaţia $a^2 + b = p(a) + \big(p(b)\big)^2$, atunci $a = b$.

revista Tzaola, Mexic, nr. 1/2020

Soluţia 1: Dacă b este compus, atunci $b = p(b) \cdot k$ cu $k \geq p(b)$ căci k este tot un divizor al lui b, mai mare ca 1, deci mai mare sau egal cu $p(b)$. Atunci $0 < a^2 - p(a) = \big(p(b)\big)^2 - b \leq 0$, contradicţie. Aşadar, b este prim, deci $p(b) = b$.
Dacă a este compus, din $a^2 - p(a) = b^2 - b$ obţinem $(2b-1)^2 = 4b^2 - 4b + 1 = 4a^2 - 4p(a) + 1$, dar $4a^2 - 4a + 1 < 4a^2 - 4p(a) + 1 < 4a^2$, deci $(2b-1)^2$ este cuprins între două pătrate perfecte consecutive, contradicţie.
Rămâne că a este prim. Ecuaţia revine la $a^2 + b = b^2 + a$, adică la $(a-b)(a+b-1) = 0$, de unde $a = b$.

Soluţia 2: (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Fie $p = p(a)$, $q = p(b)$. Dacă b este compus, atunci $b = nq$, cu $n \geq q$ şi $a^2 - p = q(q-n) \leq 0$, contradicţie. Rezultă că b este prim, deci $b = q$ şi $a^2 - q^2 = p - q$.
Dacă $p = q$, atunci rezultă imediat că $a = q = b$.
Dacă $p > q$, atunci $a > q$ şi $a + q = \dfrac{p-q}{a-q} < \dfrac{p}{1} = p \leq a$, contradicţie.
Dacă $p < q$, atunci din relaţia $a^2 - q^2 = p - q$ rezultă $a < q$ şi $a + q = \dfrac{q-p}{q-a} < q$, contradicţie.

Am mai primit soluţii de la: *David Ghibu, Cezara Danciu, Emanuel Mazăre, David Ştefan Toader, Elisa Ipate, Francesca Balaur, Ana Duguleanu* şi *Ştefan Gobej.*

Problem of the week no. 235

For a positive integer $n > 1$, denote by $p(n)$ its smallest prime divisor. Prove that, if $a, b > 1$ are positive integers that satisfy $a^2 + b = p(a) + \big(p(b)\big)^2$, then $a = b$.

Tzaloa, no. 1/2020

Solution 1: If b is composite, then $b = p(b) \cdot k$ cu $k \geq p(b)$ because k is also a divisor of b, greater than 1, so at least $p(b)$. Then $0 < a^2 - p(a) = \big(p(b)\big)^2 - b \leq 0$, contradiction. Therefore b is prime, i.e. $p(b) = b$.
If a is composite, from $a^2 - p(a) = b^2 - b$ we obtain $(2b-1)^2 = 4b^2 - 4b + 1 = 4a^2 - 4p(a) + 1$, but $4a^2 - 4a + 1 < 4a^2 - 4p(a) + 1 < 4a^2$, means that $(2b-1)^2$ is between two consecutive squares, which is not possible.
It remains that a is prime. The equation becomes $a^2 + b = b^2 + a$, i.e. $(a-b)(a+$

$b-1)=0$, so $a=b$.

Solution 2: (*Corneliu Mănescu-Avram*)
Put $p=p(a)$, $q=p(b)$. If b is composite, then $b=nq$, cu $n\geq q$ and $a^2-p=q(q-n)\leq 0$, contradiction. It follows that b is a prime, therefore $b=q$ and $a^2-q^2=p-q$.
If $p=q$, then $a=q=b$.
If $p>q$, then $a>q$ and $a+q=\dfrac{p-q}{a-q}<\dfrac{p}{1}=p\leq a$, contradiction.
If $p<q$, then $a^2-q^2=p-q$ leads to $a<q$ and $a+q=\dfrac{q-p}{q-a}<q$, contradiction.