Problema săptămânii 232

Un pachet de cărţi constă din n cărţi numerotate de la 1 la n. Cărţile din pachet sunt aşezate într-o ordine arbitrară pe o masă, sub formă de teanc, cu faţa în sus. La o mutare, dacă pe cartea de deasupra este scris numărul k, se inversează ordinea primelor k cărţi din teanc. Arătaţi că, după un anumit număr de mutări, cartea de deasupra va fi cea cu numărul 1.

Soluţia 1: (*Cezara Danciu*)
Singurul mod în care jocul s-ar putea opri ar fi să apară numărul 1 sus. Presupunem că acest lucru nu se întâmplă şi că jocul continuă la nesfârşit. Numărul poziţiilor fiind finit, la un moment dat s-ar ajunge la o poziţie care a mai fost. Deoarece fiecare poziţie o determină pe următoarea, de la un moment dat poziţiile se vor repeta periodic. Ne uităm numai la poziţiile care apar după acel moment, cele care se repetă. Urmărim cea mai mare carte care ajunge sus. Ea ajunge la un moment dat la locul ei şi nu va mai putea fi deranjată de la locul ei apariţia unor cărţi mai mici, deci apariţia ei sus nu se va putea repeta.
În concluzie, jocul nu poate continua la nesfârşit, se va opri la un moment dat, adică deasupra îl vom avea pe 1.

Soluţia 2: (inducţie)
Notăm afirmaţia din enunţ cu $P(n)$. Atunci $P(1)$ este evident adevărată.
Fie $n \geq 1$, arbitrar. Presupunem $P(n)$ adevărată şi demonstrăm $P(n+1)$. Distingem două situaţii:
1. Cartea $n+1$ ajunge la un moment dat sus. Atunci după respectivul moment cartea $n+1$ devine ultima în teanc şi nu va mai fi mişcată de acolo. Primele n cărţi din teanc sunt numerotate $1, 2, \ldots, n$ (într-o anumită ordine). Putem ignora ultima carte din teanc. Conform ipotezei de inducţie, cartea 1 va ajunge sus.
2. Cartea $n+1$ nu ajunge niciodată sus. Cartea de pe poziţia $n+1$, să o notăm cu k, nu va fi niciodată deranjată de la locul ei. Pe primele n poziţii vor fi mereu cărţile $1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+1$, cu menţiunea că $n+1$ nu va fi vizibilă niciodată. Din moment ce ea nu devine vizibilă, nu contează ce număr poartă. Înlocuim numărul de pe ea cu k. Atunci pe primele n poziţii sunt cărţile numerotate $1, 2, \ldots, n$ şi, potrivit ipotezei de inducţie, cartea cu numărul 1 va ajunge sus.

Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, Radu Şerban, Emanuel Mazăre, Ştefan Gobej, Francesca Balaur, Ana Duguleanu* şi *Tashi Diaconescu.*

Problem of the week no. 232

A deck of cards consists of n cards labeled from 1 through n. The cards are in random order. If the card on top is labeled with k, reverse the order of the top k cards. Prove that eventually the card labeled with 1 will get to the top of the deck.

Solution 1: (*Cezara Danciu*)
The only way for the process to stop is to get 1 on top. Assume this never happens, and the process continues forever. The number of positions being finite, eventually one such position will repeat itself. But each position determines the following one, so the positions will repeat periodically (from some point on). We only look at these positions. Let us now look at the largest card that will appear on top, k. After being on top, card k gets to position k and it can not be moved from there, so the process can not repeat the same steps.
The contradiction we obtained shows that 1 will eventually get to the top.

Solution 2: (induction)
Denote the statement of the problem by $P(n)$. Then $P(1)$ is obviously true.
Consider an arbitrary $n \geq 1$. Let us assume $P(n)$ to be true and let us prove $P(n+1)$. We distinguish between two situations:
1. Card $n+1$ will eventually get on top. From the moment it gets to the top, $n+1$ will be, undisturbed, on the bottom of the deck so we can simply ignore it. The first n cards are labeled $1, 2, \ldots, n$ (in some order). According to our inductive hypothesis, card 1 will get on top.
2. Card $n+1$ never gets to the top. In this case, the card initially being on the bottom of the deck, let us call it k, will stay there forever. Since we will never see cards k and $n+1$ on top, swapping the numbers on these cards will make no difference. Again, the first n cards of the deck will be labeled $1, 2, \ldots, n$, and, according to the inductive hypothesis, card 1 will get to the top.