Problema săptămânii 231

Arătaţi că, dintre oricare n numere întregi consecutive, se pot alege câteva (cel puţin unul), astfel încât suma numerelor alese să fie divizibilă cu $(1 + 2 + \ldots + n)$.

Concursul KöMaL, 2020

Soluţie: (KöMaL)
Vom folosi următorul rezultat bine cunoscut:

Lemá. Oricare ar fi k numere întregi $x_1, x_2, \ldots, x_k$, putem alege dintre ele câteva (minim unul), a căror sumă este divizibilă cu k.

Demonstraţie: Ne uităm la numerele

$$s_0 = 0,\ s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Sunt $k + 1$ numere; conform principiului cutiei, printre ele vom găsi două, s_ℓ şi s_m ($\ell < m$), care dau acelaşi rest la împărţirea cu k. Atunci $s_m - s_\ell = x_{\ell+1} + \ldots + x_m$ este divizibil cu k.

În continuare, vom considera două cazuri, în funcţie de paritatea lui n.

Cazul I: n este impar; $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $1 + 2 + \ldots + n = k(2k - 1)$.
Pentru orice $0 \leq i < 2k - 1$ există printre cele $n = 2k - 1$ numere consecutive unul care este congruent cu i modulo $2k - 1$; fie acesta a_i. Considerăm sumele:

$$a_0,\ a_1 + a_{2k-2},\ a_2 + a_{2k-3},\ \ldots,\ a_{k-1} + a_k.$$

Fiecare dintre acestea este divizibilă cu $2k - 1$, iar conform lemei, putem alege dintre ele câteva a căror sumă să fie divizibilă cu k. Suma sumelor alese este suma unor a_i-uri distincte şi este divizibilă cu k şi cu $2k - 1$. Cum k şi $2k - 1$ sunt relativ prime, suma numerelor alese este divizibilă şi cu $k(2k - 1)$.

Cazul II: n este par; $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, iar $1 + 2 + \ldots + n = k(2k + 1)$.
Să adăugăm la cele $n = 2k$ numere consecutive încă unul, ,,interzis". Atunci, printre cele $2k + 1$ numere consecutive astfel obţinute avem, pentru fiecare $0 \leq i \leq 2k$, câte un a_i care este congruent cu i modulo $2k + 1$. Considerăm sumele:

$$a_0,\ a_1 + a_{2k},\ a_2 + a_{2k-1},\ \ldots,\ a_k + a_{k+1}.$$

Sunt $k + 1$ sume, toate divizibile cu $2k + 1$; într-una din ele apare însă numărul interzis. Ne uităm la celelalte k sume. Conform lemei, putem alege dintre acestea câteva cu suma divizibilă cu k. Suma sumelor alese este suma unor numere distincte dintre cele iniţiale (adică nu conţine numărul interzis) şi este divizibilă atât cu k cât şi cu $2k + 1$. Cum k şi $2k + 1$ sunt relativ prime, suma numerelor alese este divizibilă şi cu $k(2k + 1)$.

Am primit soluţii de la *Cezara Danciu, Francesca Balaur, Emanuel Mazăre* şi *Radu Stoleriu.*

Problem of the week no. 231

Show that it is always possible to select some numbers (at least one) out of n consecutive integers such that their sum is divisible by $(1 + 2 + \ldots + n)$.

KöMaL Contest, 2020

Solution: (KöMaL)
We use the following well known

Lemma. From any k integers $x_1, x_2, \ldots, x_k$ one can choose a few (at least one) whose sum is a multiple of k.

Proof: Consider the numbers

$$s_0 = 0,\ s_1 = x_1,\ s_2 = x_1 + x_2,\ s_3 = x_1 + x_2 + x_3,\ \ldots,\ s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

There are $k + 1$ numbers; from the Pigeonhole Principle, among these sums there are two, s_ℓ and s_m ($\ell < m$), that give the same remainder when divided by k. Then $s_m - s_\ell = x_{\ell+1} + \ldots + x_m$ is a multiple of k.

Next, we treat two cases, depending on the parity of n.

Case I: n odd; $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, and $1 + 2 + \ldots + n = k(2k - 1)$.
For all $0 \leq i < 2k - 1$, among the $n = 2k - 1$ consecutive numbers, there is one that is congruent to i modulo $2k - 1$; denote it by a_i. Consider the sums:

$$a_0,\ a_1 + a_{2k-2},\ a_2 + a_{2k-3},\ \ldots,\ a_{k-1} + a_k.$$

Each of them is divisible by $2k - 1$, and, according to the Lemma, we can choose some of them whose sum is a multiple of k. The sum of the chosen sums is a sum of distinct a_i and is a multiple of both k and $2k - 1$. As k and $2k - 1$ are co-prime, the sum of the chosen numbers is a multiple of $k(2k - 1)$.

Case II: n is even; $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, and $1 + 2 + \ldots + n = k(2k + 1)$.
Let as add to the $n = 2k$ consecutive numbers another, a "forbidden" one. Among the $2k + 1$ consecutive integers thus obtained, we have, for each $0 \leq i \leq 2k$, an a_i that is congruent to i modulo $2k + 1$. Consider the sums:

$$a_0,\ a_1 + a_{2k},\ a_2 + a_{2k-1},\ \ldots,\ a_k + a_{k+1}.$$

There are $k + 1$ sums, all divisible by $2k + 1$; one of them contains the forbidden numbers. Let us discard that sum. We are left with k sums. According to the

Lemma, we can choose some of these sums such that their sum is divisible by k. The sum of the chosen sums is a sum of distinct numbers (the forbidden number does not appear) and it is a multiple of both k and $2k+1$. As k and $2k+1$ are co-prime, the sum of the chosen numbers is a multiple of $k(2k+1)$.