Problema săptămânii 230

Fie $a, b, c > 0$ şi $x, y, z \geq 0$. Arătaţi că dacă $x + aby \leq a(y + z)$, $y + bcz \leq b(z + x)$ şi $z + cax \leq c(x + y)$, atunci $x = y = z = 0$ sau $a = b = c = 1$.

George Stoica, Concursul KöMaL, 2020

Soluţie: Rescriem relaţiile, echivalent, sub forma $\frac{1}{a}x+by \leq y+z$, $\frac{1}{b}y+cz \leq z+x$, $\frac{1}{c}z + ax \leq x + y$. Adunând aceste inegalităţi obţinem $\left(a + \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{1}{b}\right)y + \left(c + \frac{1}{c}\right)z \leq 2(x + y + z)$.

Pe de altă parte, din $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 ax + \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 by + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 cz \geq 0$, care este chiar inegalitatea contrară, deducem că trebuie să avem egalitate în inegalitatea precedentă, deci şi în cele din enunţ.

Trebuie să avem $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 ax = \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 by = \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 cz = 0$ adică

$$(a = 1 \text{ sau } x = 0) \text{ şi } (b = 1 \text{ sau } y = 0) \text{ şi } (c = 1 \text{ sau } z = 0).$$

Dacă, de pildă, am avea $z = 0$, faptul că şi inegalităţile din enunţ trebuie să fie satisfăcute cu egalitate, conduce la relaţiile: $x + aby = ay$, $y = bx$ şi $cax = cx + cy$. Dacă $y \neq 0$, atunci avem obligatoriu $b = 1$, deci $y = x$, ceea ce contrazice însă $x + aby = ay$. Aşadar, $z = 0$ implică $y = 0$ şi apoi $x = 0$. În concluzie, avem fie $x = y = z = 0$, fie $a = b = c = 1$.

Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, Carol Luca Gasan, Ştefan Gobej, Ana Duguleanu, David Ghibu, Emanuel Mazăre, Tashi Diaconescu* şi *Radu Stoleriu.*

Problem of the week no. 230

Let $a, b, c > 0$ and $x, y, z \geq 0$. Prove that if $x + aby \leq a(y + z)$, $y + bcz \leq b(z + x)$, and $z + cax \leq c(x + y)$, then either $x = y = z = 0$ or $a = b = c = 1$.

George Stoica, Concursul KöMaL, 2020

Solution:

We rewrite equivalently the inequalities as $\frac{1}{a}x + by \leq y + z$, $\frac{1}{b}y + cz \leq z + x$, $\frac{1}{c}z + ax \leq x + y$. Adding them yields $\left(a + \frac{1}{a}\right)x + \left(b + \frac{1}{b}\right)y + \left(c + \frac{1}{c}\right)z \leq 2(x + y + z)$.

On the other hand, from $\left(1 - \frac{1}{a}\right)^2 ax + \left(1 - \frac{1}{b}\right)^2 by + \left(1 - \frac{1}{c}\right)^2 cz \geq 0$, which is actually the contrary of the previous inequality, we deduce that we must have

equality in the previous inequality, but also in the ones in the statement of the problem. Therefore, we must have $\left(1-\frac{1}{a}\right)^2 ax = \left(1-\frac{1}{b}\right)^2 by = \left(1-\frac{1}{c}\right)^2 cz = 0$, i.e.: ($a = 1$ or $x = 0$) and ($b = 1$ or $y = 0$) and ($c = 1$ or $z = 0$).
If $z = 0$, from the fact that the initial inequalities must be satisfied with equality, we obtain the following relations: $x+aby = ay$, $y = bx$ and $cax = cx+cy$. If $y \neq 0$, we would have $b = 1$, therefore $y = x$, which contradicts $x+aby = ay$. Thus, $z = 0$ implies $y = 0$ and then $x = 0$. In conclusion, we have either $x = y = z = 0$, or $a = b = c = 1$.