Problema săptămânii 228

Se consideră o tablă 6×4 împărţită în 24 de pătrăţele unitate. Trebuie să colorăm cu roşu 18 dintre aceste pătrăţele unitate astfel încât pe fiecare linie şi pe fiecare coloană să avem un număr par de pătrăţele colorate. În câte moduri se poate face colorarea?

Admitere Cambridge

Soluţie: O colorare este bună dacă rămân 6 pătrăţele necolorate, un număr par pe fiecare linie şi fiecare coloană. Pe fiecare linie şi coloană trebuie să avem fie 0, fie 2 pătrăţele necolorate. Dacă pe o linie am avea 4 sau 6, avem deja 4 coloane care conţin minim un pătrăţel necolorat. Atunci fiecare din aceste coloane are cel două pătrăţele necolorate, deci sunt cel puţin 8 pătrăţele necolorate, contradicţie. Liniile pe care vom avea câte două pătrăţele necolorate pot fi alese în $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ moduri (pentru cei care nu ştiu combinări: prima linie poate fi aleasă în 6 moduri, următoarea în 5, iar ultima în 4 moduri, dar numărând astfel, fiecare combinaţie de 3 linii va fi numărată de 6 ori, liniile putând fi alese în 6 ordini posibile). Coloanele pe care rămân pătrăţele necolorate pot fi alese în $C_4^3 = 4$ moduri (coloana complet colorată poate fi oricare din cele 4). În fine, odată alese liniile şi coloanele, avem practic un pătrat 3×3 în care trebuie să colorăm câte un pătrăţel pe fiecare linie şi fiecare coloană. Pătrăţelul colorat de pe linia 1 poate fi ales în 3 moduri, apoi cel de pe linia 2 în două moduri (nu poate sta pe aceeaşi coloană cu pătrăţelul colorat de pe prima linie), iar pătrăţelul colorat de pe linia 3 poate fi pus numai pe coloana pe care nu am colorat încă niciun pătrăţel. Aşadar, sunt 6 colorări posibile ale pătratului 3×3. În total, sunt $20 \cdot 4 \cdot 6 = 480$ de colorări posibile.

Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, Radu Şerban, Francesca Balaur, Ana Duguleanu, Adrian Zanca, Ştefan Gobej, David Ghibu, Radu Stoleriu, Emanuel Mazăre* şi *Andrei Pană.*

Problem of the week no. 228

Consider a 6×4 rectangle split into 24 unit squares. We need to paint red 18 of these unit squares such that, each row and each column contains an even number of red squares. How many ways to color the rectangle are there?

Admission Test, Cambridge University

Solution: A coloring is good if the 6 unit squared that remain uncolored are placed such that on each row and column we have an even number of uncolored squares. On each row/column we must have 0 or 2 uncolored squares. Indeed, assuming one could have 4 or 6 of them on the same row, we would already have at least 4 columns with at least one uncolored square, which means we must have at least another one on each of these columns, so at least 8 in total. This is impossible.

The same is true for columns.

The 3 rows on which there are two uncolored squares can be chosen in $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20$ ways.

The 3 columns that contain uncolored can be chosen in $\binom{4}{3} = 4$ ways.

Finally, once the rows and columns that contain uncolored squares have been chosen, we must in fact count the ways of coloring the unit squares of a 3×3 square such that each row/column contains exactly one red squares. There are 6 ways of coloring (the colored square on the first row can be chosen in 3 ways, then the one on the second row in 2 ways, the position of the red one in the last row being thus uniquely determined).

In total, there are $20 \cdot 4 \cdot 6 = 480$ ways of coloring.