Problema săptămânii 227

Determinaţi toate perechile (x, y) de numere naturale nenule care satisfac egalitatea

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

OIM, 1980[1]

Soluţia 1: (*Corneliu Mănescu-Avram, David Ghibu*)
Cu notaţiile $s = x+y$, $p = xy$, ecuaţia se scrie $2p(s-4) = s^3-8s^2-8$. Evident, $s = 4$ nu convine. Rezultă că s este par şi $s-4$ divide $s^3-8s^2-8 = (s-4)(s^2-4s-16)-72$, deci $s-4$ divide 72. Combinat cu faptul că $s^2 \geq 4p = \dfrac{2(s^3-8s^2-8)}{s-4}$, rezultă $s \in \{2, 10, 12\}$. Soluţii găsim numai în cazul $s = 10$: rezultă $p = 16$, apoi $\{x, y\} = \{2, 8\}$.

Soluţia 2: (*Francesca Balaur*)
Relaţia din enunţ se poate scrie $(x + y)(x^2 + y^2 - 8x - 8y) = 8(1 - xy)$. Dacă $x, y > 8$, membrul stâng este pozitiv, iar cel drept negativ, deci egalitatea nu poate avea loc. Aşadar, $x \leq 8$ sau $y \leq 8$. Putem presupune $x \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.

• Dacă $x = 1$, se ajunge la $y(y^2-7y-7) = 15$. Deducem că $y \in D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, dar niciunul din aceste numere nu verifică ecuaţia.

• Dacă $x = 2$, se ajunge la $y(y^2 - 6y - 12) = 32$. Deducem că $y \in D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Numai $y = 8$ verifică ecuaţia, deci $x = 2$, $y = 8$ este o soluţie a ecuaţiei iniţiale.

• Dacă $x = 3$, se ajunge la $y(y^2 - 5y - 13) = 53$ care nu are soluţii naturale.

Se continuă analog cazurile $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$ fără a se găsi soluţii.
Cazul $x = 8$ conduce direct la $y^3 = 8$, deci la $y = 2$.
Conchidem că singurele soluţii sunt $x = 2$, $y = 8$ şi $x = 8$, $y = 2$.

Variantă a soluţiei de mai sus. (*Cezara Danciu, Ştefan Gobej*)
Scriem relaţia din enunţ $(x - 8)(x^2 + xy + y^2) = 8 - y^3$. Dacă $y = 1$, atunci $x(x^2 - 7x - 7) = 15$, ecuaţie despre care, ca mai sus, se arată că nu are soluţii naturale. Pentru $y = 2$ se obţine imediat $x = 8$. Dacă $y > 2$, cum $x^2+xy+y^2 > 0$, deducem $x < 8$. De aici, se face aceeaşi analiză a cazurilor ca mai sus.

Soluţia 3: (*Ana Duguleanu*)
Relaţia din enunţ se scrie $(x^2 + y^2)(x + y - 8) = 4(2xy + 2)$.
Observăm că x şi y trebuie să fie de aceeaşi paritate şi că nu pot fi egale. Atunci $(x-y)^2 > 2$, deci $x^2+y^2 > 2xy+2$. Deducem că $0 < x+y-8 < 4$. Cum $x+y-8$ este par, rezultă $x+y = 10$. Verificăm cele câteva perechi cu suma 10. Relaţia din enunţ este verificată numai de $\{x, y\} = \{2, 8\}$.

[1] Din motive politice, OIM 1980 nu s-a desfăşurat. În locul ei, s-au ţinut trei mici concursuri internaţionale. La cel din Luxemburg, la care s-a dat problema de mai sus, au participat 4 ţări: Belgia, Olanda, Iugoslavia şi Marea Britanie.

Soluţia 4: (*Carol Luca Gasan*)
Presupunând că am avea soluţie cu $x = y$, ajungem la $x^2(x-6) = 2$, evident fără soluţii întregi.
Înmulţind ecuaţia din enunţ cu $x - y \neq 0$, ea se scrie echivalent $x^4 - y^4 = 8(x^3 - y^3 + x - y)$, sau $x^4 - 8x^3 - 8x = y^4 - 8y^3 - 8y$. Notând $f(n) = n^4 - 8n^3 - 8n$, avem $f(1) = -15$, $f(2) = -64$,, $f(3) = -159$, $f(4) = -288$, $f(5) = -415$, $f(7) = -480$, $f(8) = -64$, $f(9) = 657$.
Observăm că $x = 2$, $y = 8$ şi $x = 8$, $y = 2$ sunt soluţii.
Pentru $n \geq 7$ avem $f(n+1) - f(n) = 4n^3 - 18n^2 - 20n - 15 \geq 28n^2 - 18n^2 - 20n - 15 = 10n^2 - 20n - 15 \geq 70n - 20n - 15 = 50n - 15 > 0$ şi, se vede, pentru $x \geq 9$ nu mai este posibil ca $f(x) = f(y)$ cu $x \neq y$.
Aşadar, soluţiile găsite sunt singurele.

Am primit soluţii de la: *Francesca Balaur, Cezara Danciu, Marian Cucoaneş, Andrei Pană, Ana Duguleanu, Carol Luca Gasan, Corneliu Mănescu-Avram, David Ghibu, Ştefan Gobej* şi *Emanuel Mazăre.*

Problem of the week no. 227

Find all pairs (x, y) of positive integers such that

$$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 8(x^2 + xy + y^2 + 1).$$

Solution 1: (*Corneliu Mănescu-Avram, David Ghibu*)
Putting $s = x + y$, $p = xy$, the equation becomes $2p(s-4) = s^3 - 8s^2 - 8$. Clearly, $s = 4$ is nor possible. It follows that s is even and $s - 4$ divides $s^3 - 8s^2 - 8 = (s-4)(s^2 - 4s - 16) - 72$, therefore $s - 4$ divides 72. Combining this with the fact that $s^2 \geq 4p = \dfrac{2(s^3 - 8s^2 - 8)}{s-4}$ leaves us with $s \in \{2, 10, 12\}$. The only case leading to solutions is $s = 10$: we get $p = 16$, then $\{x, y\} = \{2, 8\}$.

Solution 2: (*Francesca Balaur*)
The equation can be written $(x + y)(x^2 + y^2 - 8x - 8y) = 8(1 - xy)$. If $x, y > 8$, the LHS is positive, while the RHS is negative, so the equality can not hold. Thus, $x \leq 8$ or $y \leq 8$. We can assume $x \in \{1, 2, \ldots, 8\}$.
• For $x = 1$ one gets $y(y^2 - 7y - 7) = 15$. It follows that $y \in D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, but none of these numbers satisfies the relation.
• For $x = 2$ one gets $y(y^2 - 6y - 12) = 32$. It follows that $y \in D_{32} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Only $y = 8$ satisfies the relation; $x = 2$, $y = 8$ is a solution of the initial equation.
• $x = 3$ leads to $y(y^2 - 5y - 13) = 53$, which does not have any integer solutions. One continues similarly with cases $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$, $x = 7$ without finding any solutions.
Case $x = 8$ leads directly to $y^3 = 8$, i.e. to $y = 2$.
We conclude that the only solutions are $x = 2$, $y = 8$ and $x = 8$, $y = 2$.

A variant of the solution above. (*Cezara Danciu, Ştefan Gobej*)
Rewrite the equation as $(x-8)(x^2+xy+y^2) = 8-y^3$. If $y = 1$, then $x(x^2-7x-7) = 15$, equation that, as shown above, has no integer solutions. For $y = 2$ one immediately gets $x = 8$. If $y > 2$, since $x^2 + xy + y^2 > 0$, one gets $x < 8$. This leads to the same casework as above.

Solution 3: (*Ana Duguleanu*)
Rewrite the equation as $(x^2 + y^2)(x + y - 8) = 4(2xy + 2)$.
Observe that x and y need to have the same parity and that they can not be equal. Then, $(x - y)^2 > 2$, hence $x^2 + y^2 > 2xy + 2$. We deduce that $0 < x + y - 8 < 4$. As $x + y - 8$ is even, we get $x + y = 10$. There are only a few pairs to check 10. The equation is satisfied only by the pairs with $\{x, y\} = \{2, 8\}$.

Solution 4: (*Carol Luca Gasan*)
Assuming that the is a solution with $x = y$, we get to $x^2(x - 6) = 2$, which clearly has no integer solutions.
Multiplying the equation by $x - y \neq 0$, we rewrite it equivalently $x^4 - y^4 = 8(x^3 - y^3 + x - y)$, or $x^4 - 8x^3 - 8x = y^4 - 8y^3 - 8y$. Putting $f(n) = n^4 - 8n^3 - 8n$, we have $f(1) = -15$, $f(2) = -64$,, $f(3) = -159$, $f(4) = -288$, $f(5) = -415$, $f(7) = -480$, $f(8) = -64$, $f(9) = 657$.
Notice that $x = 2$, $y = 8$ and $x = 8$, $y = 2$ are solutions.
For $n \geq 7$ one has $f(n+1)-f(n) = 4n^3-18n^2-20n-15 \geq 28n^2-18n^2-20n-15 = 10n^2 - 20n - 15 \geq 70n - 20n - 15 = 50n - 15 > 0$ (f is strictly increasing on this interval), therefore it is easy to see that for $x \geq 9$ it is no longer possible to have $f(x) = f(y)$ with $x \neq y$.
Thus, the solutions that have been found are the only ones.