Problema săptămânii 226

Fie $x, y, z \geq 0$. Demonstraţi că $x^4(y+z)+y^4(z+x)+z^4(x+y) \leq \dfrac{1}{12}(x+y+z)^5$. Când are loc egalitatea?

Soluţia 1: (*Francesca Balaur*)
Notăm $p = x+y+z$, $q = xy+yz+zx$ şi $r = xyz$. Inegalitatea fiind omogenă, putem presupune $x+y+z = 1$. Din inegalitatea mediilor, $0 \leq r \leq \dfrac{1}{27}$. Inegalitatea din enunţ se scrie succesiv $x^3(xy+xz)+y^3(yx+zx)+z^3(zx+xy) \leq \dfrac{1}{12}$, $x^3(q-yz)+y^3(q-zx)+z^3(q-xy) \leq \dfrac{1}{12}$, $q(x^3+y^3+z^3)-r(x^2+y^2+z^2) \leq \dfrac{1}{12}$, $q\big(3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\big)-r\big((x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\big) \leq \dfrac{1}{12}$, $q(3r+1-3q)-r(1-2q) \leq \dfrac{1}{12}$ şi, în fine, $r(5q-1)+q(1-3q) \leq \dfrac{1}{12}$.

• Dacă $q \leq \dfrac{1}{5}$, atunci $r(5q-1) \leq 0$ şi $q(1-3q) \leq \dfrac{1}{12} \Leftrightarrow (6q-1)^2 \geq 0$, deci, prin adunare, $r(5q-1)+q(1-3q) \leq \dfrac{1}{12}$.

Egalitatea are loc dacă $r = 0$ şi $q = \dfrac{1}{6}$, deci una din variabile este 0, iar celelalte două au suma 1 şi produsul $\dfrac{1}{6}$. Se obţin tripletele $\{x,y,z\} = \left\{0, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right\}$.

Renunţând la restricţia $x+y+z = 1$, conchidem că avem egalitate dacă $\{x,y,z\} = \left\{0, \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot\alpha\,, \dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\cdot\alpha\right\}$, cu $\alpha \geq 0$.

• Dacă $q > \dfrac{1}{5}$, notăm $f(q) = r(5q-1)+q(1-3q)$ şi arătăm că $f(q) < f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \dfrac{2}{25} < \dfrac{1}{12}$. (De fapt, pentru orice $r \leq \frac{1}{25}$, f este descrescătoare pe $[\frac{1}{5}, \infty)$.)

Avem $f(q) - f\left(\dfrac{1}{5}\right) = \left(q-\dfrac{1}{5}\right)\left(1-3q-\dfrac{3}{5}+5r\right) = \left(q-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}-3q+5r\right) < 0$ deoarece $q-\dfrac{1}{5} > 0$ şi $\dfrac{2}{5}-3q+5r < \dfrac{2}{5}-3\cdot\dfrac{1}{5}+5\cdot\dfrac{1}{27} < 0$.

Aşadar, inegalitatea are loc şi în acest caz, fără egalitate. Inegalitatea este astfel demonstrată în ambele cazuri, cu egalitate pentru

$$\{x,y,z\} = \left\{0, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\cdot\alpha\,, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\cdot\alpha\right\}, \text{ cu } \alpha \geq 0.$$

Soluţia 2: (cu mixing variables)
Inegalitatea fiind simetrică, putem presupune $x \le y \le z$.
Notând $E(x,y,z) = x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y)$, arătăm că

$$E(x,y,z) \overset{(1)}{\le} E(0, x+y, z) \overset{(2)}{\le} \frac{1}{12}\,(x+y+z)^5.$$

Inegalitatea (1) este echivalentă cu $x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \le 0^4(x+y+z) + (x+y)^4(z+0)^2 + z^4(x+y+0)$, adică $x^4(y+z) + y^4(z+x) \le (x+y)^4 z$, sau $x^4y + y^4x \le 4x^3yz + 6x^2y^2z + 4xy^3z$, inegalitate evident adevărată dacă $x \le y \le z$. Egalitatea în (1) are loc dacă şi numai dacă $x = 0$.
Notând $x + y = t$, inegalitatea (2) revine la $t^4z + z^4t \le \dfrac{(t+z)^5}{12}$ sau, notând $\dfrac{t}{z} = u$, $12u^4 + 12u \le (u+1)^5$. Împărţind cu $u + 1 > 0$, inegalitatea revine la $12(u^3 - u^2 + u) \le (u+1)^4$, adică $u^4 - 8u^3 + 18u^2 - 8u + 1 \ge 0$. Această inegalitate se scrie $(u^2 - 4u + 1)^2 \ge 0$, evident adevărată, cu egalitate dacă $u^2 - 4u + 1 = 0$, adică $u = 2 \pm \sqrt{3}$.
Inegalitatea este astfel demonstrată. Egalitatea are loc dacă $x = 0$ şi $\dfrac{y}{z} = 2 \pm \sqrt{3}$, adică dacă $\{x,y,z\} = \big\{0,\ (2+\sqrt{3})\beta,\ \beta\big\}$, cu $\beta \ge 0$ (şi permutările acestor triplete). (Nu am mai scris şi tripletele de forma $(0,\ (2-\sqrt{3})\beta,\ \beta)$ pentru că permutând y şi z, ele sunt $(0,\ \beta,\ (2-\sqrt{3})\beta) = (0,\ (2+\sqrt{3})\beta',\ \beta')$, cu $\beta' = (2-\sqrt{3})\beta$, adică de fapt de obţin din permutarea celorlalte triplete.)

Soluţia 3: (*Titu Zvonaru*)
Inegalitatea de demonstrat este simetrică şi omogenă de gradul 5, prin urmare este suficient să o demonstrăm pentru $z = 0$ şi pentru $y = z$.
Pentru $z = 0$ inegalitatea se scrie $(x+y)^2(x^2 - 4xy + y^2)^2 \ge 0$. Avem egalitate pentru triplete de forma $\big((2 \pm \sqrt{3})k, k, 0\big)$, cu $k \ge 0$, şi permutările acestora.
Pentru $y = z$ inegalitatea se scrie $x(x^2 - 7xy - 5y^2)^2 + x^3y^2 + 10x^2y^3 + 31xy^4 + 8y^5 \ge 0$.
Egalitate avem numai dacă $x = y = z = 0$.

Soluţia 4: (*Marian Cucoaneş*)
Se verifică prin calcul direct următoarele două egalităţi:
$(x+y+z)^5 - 12(x^4y + x^4z + y^4x + y^4z + z^4x + z^4y) = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz)^2 + 12xyz(x^2 + y^2 + z^2 - 3xy - 3xz - 3yz)$ (1)
şi
$(x+y+z)^5 - 12(x^4y + x^4z + y^4x + y^4z + z^4x + z^4y) =$
$(x+y+z)(xy+xz+yz)^2 + (x+y+z)(3xy + 3xz + 3yz - x^2 - y^2 - z^2)^2 +$
$2(3xy + 3xz + 3yz - x^2 - y^2 - z^2)[x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(x-y)^2 + 3xyz].$ (2)
Distingem două cazuri:
• Dacă $3xy + 3xz + 3yz - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, atunci din (2) rezultă inegalitatea din enunţ. În acest caz nu avem egalitate.
• Dacă $3xy + 3xz + 3yz - x^2 - y^2 - z^2 \le 0$, atunci inegalitatea din enunţ rezultă din (1). În acest caz avem egalitate dacă $xyz = 0$ şi $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz = 0$

adică atunci când $x = 0$ şi $y = (2 \pm \sqrt{3})z$ şi analoagele.

Am mai primit soluţii corecte de la: *Ana Duguleanu* (cu inegalitatea Hardy-Littlewood-Pólya) şi *Ştefan Gobej* (mixing variables).

Problem of the week no. 226

Let $x, y, z \geq 0$. Prove that $x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq \frac{1}{12}(x+y+z)^5$. When does equality hold?

Solution 1: (cu mixing variables)

The inequality is symmetric, therefore we may assume that $x \leq y \leq z$.

Putting $E(x,y,z) = x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y)$, we prove that

$$E(x,y,z) \overset{(1)}{\leq} E(0, x+y, z) \overset{(2)}{\leq} \frac{1}{12}(x+y+z)^5.$$

Inequality (1) is equivalent to $x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y) \leq 0^4(x+y+z) + (x+y)^4(z+0)^2 + z^4(x+y+0)$, i.e. $x^4(y+z) + y^4(z+x) \leq (x+y)^4 z$, or $x^4 y + y^4 x \leq 4x^3yz + 6x^2y^2z + 4xy^3z$, which is clearly true if $x \leq y \leq z$. Equality (1) holds if and only if $x = 0$.

Putting $x + y = t$, inequality (2) becomes $t^4 z + z^4 t \leq \frac{(t+z)^5}{12}$ or, denoting $\frac{t}{z} = u$, $12u^4 + 12u \leq (u+1)^5$. Dividing by $u + 1 > 0$, the inequality reduces to $12(u^3 - u^2 + u) \leq (u+1)^4$, i.e. $u^4 - 8u^3 + 18u^2 - 8u + 1 \geq 0$. The last inequality can be written $(u^2 - 4u + 1)^2 \geq 0$, which is true, with equality if and only if $u^2 - 4u + 1 = 0$, i.e. $u = 2 \pm \sqrt{3}$.

The inequality is thus proven. Equality holds when $x = 0$ and $\frac{y}{z} = 2 \pm \sqrt{3}$, i.e. for $\{x, y, z\} = \big\{0,\ (2+\sqrt{3})\beta,\ \beta\big\}$, with $\beta \geq 0$ (and the permutations of these triples). (By swapping y and z, the triples $(0,\ (2-\sqrt{3})\beta,\ \beta)$ become $(0,\ \beta,\ (2-\sqrt{3})\beta) = (0,\ (2+\sqrt{3})\beta',\ \beta')$, with $\beta' = (2-\sqrt{3})\beta$, therefore the triples $(0,\ (2-\sqrt{3})\beta,\ \beta)$ are in fact permutations of $(0,\ (2+\sqrt{3})\beta,\ \beta)$.)

Solution 2: (*Titu Zvonaru*)

The inequality to be proven is symmetric and homogeneous of degree 5, therefore it is sufficient to prove it for $z = 0$ and for $y = z$.

For $z = 0$ the inequality can be written $(x+y)^2(x^2 - 4xy + y^2)^2 \geq 0$.

Equality holds for triples $\big((2 \pm \sqrt{3})k, k, 0\big)$, with $k \geq 0$, and their permutations.

For $y = z$ the inequality can be written $x(x^2 - 7xy - 5y^2)^2 + x^3y^2 + 10x^2y^3 + 31xy^4 + 8y^5 \geq 0$. In this case, equality holds only when $x = y = z = 0$.

Solution 3: (*Marian Cucoaneş*)
The following two identities are easy to check:
$(x+y+z)^5-12(x^4y+x^4z+y^4x+y^4z+z^4x+z^4y)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz)^2+12xyz(x^2+y^2+z^2-3xy-3xz-3yz)$ (1)
şi
$(x+y+z)^5-12(x^4y+x^4z+y^4x+y^4z+z^4x+z^4y)=$
$(x+y+z)(xy+xz+yz)^2+(x+y+z)(3xy+3xz+3yz-x^2-y^2-z^2)^2+2(3xy+3xz+3yz-x^2-y^2-z^2)[x(y-z)^2+y(x-z)^2+z(x-y)^2+3xyz].$ (2)
We distinguish two cases:
• If $3xy+3xz+3yz-x^2-y^2-z^2>0$, from (2) follows the requested inequality. There is no equality in this case.
• If $3xy+3xz+3yz-x^2-y^2-z^2\leq 0$, the inequality follows from identity (1). In this case, equality holds if $xyz=0$ and $x^2+y^2+z^2-4xy-4xz-4yz=0$ i.e. when $x=0$ and $y=(2\pm\sqrt{3})z$ and analogues.