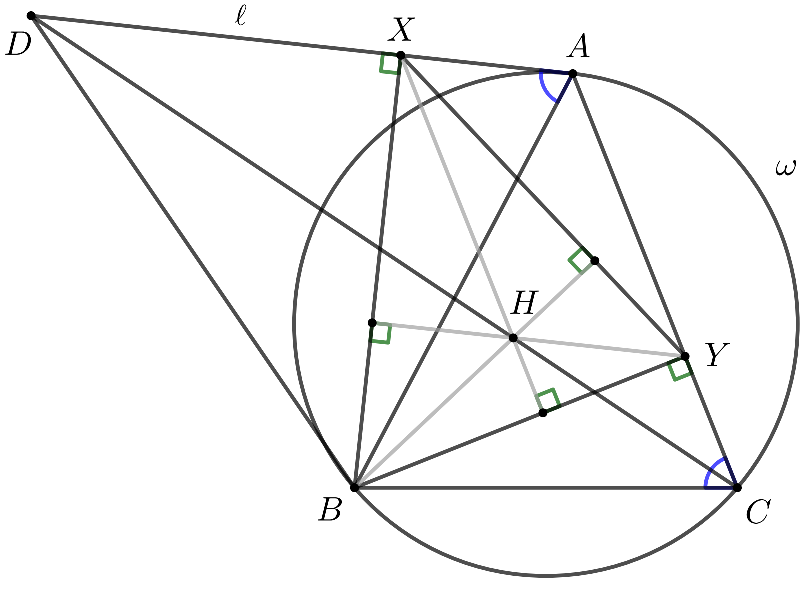
Problema săptămânii 225

Fie ω cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC şi ℓ tangenta în punctul A la cercul ω. Fie X şi Y proiecţiile lui B pe dreptele ℓ, respectiv AC. Notăm cu H ortocentrul lui BXY. Dreapta CH intersectează ℓ în D.
Arătaţi că $(BA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle CBD$.

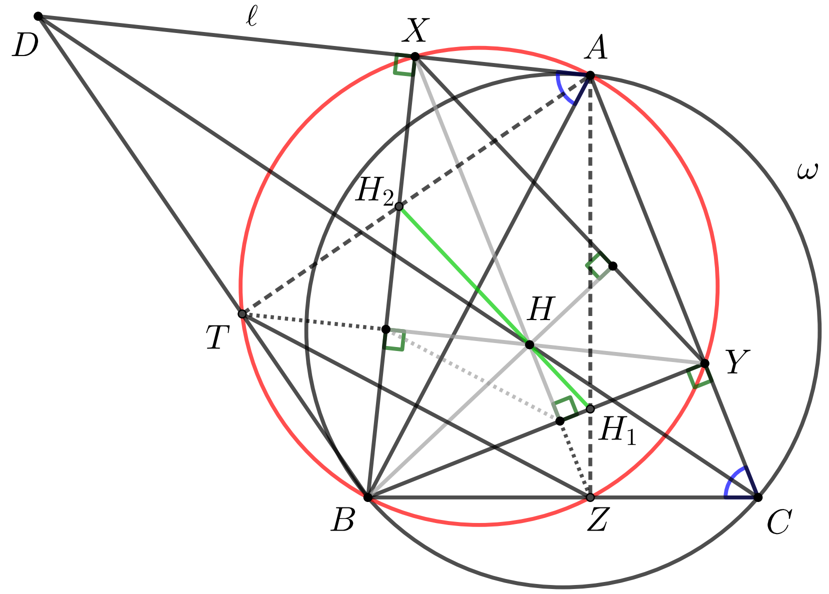
Baltic Way, 2020

Soluţie: Avem $XH \parallel AY$ (ambele perpendiculare pe BY şi $YH \parallel AX$ (ambele perpendiculare pe BX). Aşadar, $AXHY$ este paralelogram. În plus, triunghiurile CYH şi CAD sunt asemenea.
Deducem că $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{YH}{YC} = \dfrac{AX}{YC}$.   (1)
Pe de altă parte, $\sphericalangle XAB \equiv \sphericalangle ACB$ (subîntind acelaşi arc al lui ω), deci $\Delta\, XAB \sim \Delta\, YCB$, de unde $\dfrac{AX}{CY} = \dfrac{AB}{CB}$.   (2)
Din(1) şi (2) obţinem $\dfrac{DA}{AC} = \dfrac{AB}{CB}$. Atunci $\Delta\, DAB \sim \Delta\, ACB$ (LUL), deci $\sphericalangle DBA \equiv \sphericalangle ABC$.



Remarcă: Avem de fapt chiar $\Delta\, XYB \sim \Delta\, DAB \sim \Delta\, ACB$.
Remarcă: (*Tashi Diaconescu*)
Fie T şi Z proiecţiile lui A pe BD, respectiv BC, iar H_1 şi H_2 ortocentrele triunghiurilor ABC, respectiv DBA. Atunci A, X, T, B, Z, Y sunt conciclice. Aplicând teorema lui Pascal hexagramei $ATYBXZ$ rezultă că punctele H, H_1, H_2 sunt coliniare. În plus, din asemănarea triunghiurilor ABC şi DBA rezultă $\dfrac{BH_1}{BY} = \dfrac{BH_2}{BX}$, deci $H_1H_1 \parallel XY$.

O altă proprietate a configuraţiei este că $XZ \cap TY = \{H\}$ (vezi figura de mai jos):



Am primit soluţii de la: *Cezara Danciu, Francesca Balaur, Emanuel Mazăre, Carol Luca Gasan, Ana Duguleanu, Ştefan Gobej, Tashi Diaconescu* şi *Ana Boiangiu.*

Problem of the week no. 225

Let ABC be an acute triangle with circumcircle ω. Let ℓ be the tangent line to ω at A. Let X and Y be the projections of B onto lines ℓ and AC, respectively. Let H be the orthocenter of BXY. Let CH intersect ℓ at D.
Prove that $(BA$ bisects angle $\sphericalangle CBD$.

Baltic Way, 2020

The official solutions can be found here, on pages 10 and 11.