BARAJELE OBMJ, 24-26 august 2020

BARAJUL 1

Problema BJ1. Fie triunghiul *ABC* cu ortocentrul *H*. Fie h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor duse din vârfurile *A*, *B* și, respectiv *C*, iar *p* semiperimetrul triunghiului *ABC*. Se știe că $AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{2}{3} \cdot p^2$. Arătați că triunghiul *ABC* este echilateral.

Problema BJ2. Numerele reale pozitive $a,\ b,\ c$ satisfac egalitatea $a+b+c=1$.
Demonstrați identitatea:

$$\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}+\sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}=2.$$

Problema BJ3. Fie un poligon regulat cu *n* laturi și cu centrul *O*. Determinați cel mai mare număr posibil de vârfuri *k* ($k \geq 3$), care pot fi colorate în culoare verde, astfel încât punctul *O* să se afle strict în exteriorul oricărui triunghi cu toate vârfurile colorate, în cazurile când:
a) *n* = 2019; b) *n* = 2020.

Problema BJ4. a) Numărul natural n se numește *k-pătrat* dacă el poate fi reprezentat ca sumă a *k* pătrate perfecte nenule.
a) Arătați că numărul 2020 este 2-pătrat, 3-pătrat și 4-pătrat.
b) Determinați toate completele de numere naturale nenule (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*) ($a<b<c<d<e$), care verifică simultan condițiile: toate numerele $e-2,\ e,\ e+4$ sunt prime și $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=2020.$

BARAJUL 2

Problema BJ5. Fie numerele $A=1^{a_1}2^{a_2}3^{a_3}\cdot\ldots\cdot100^{a_{100}}$ și $B=1^{b_1}2^{b_2}3^{b_3}\cdot\ldots\cdot100^{b_{100}}$, unde $a_i, b_i \in \mathrm{N}$, $a_i+b_i=101-i$, ($i=1,2,\ldots,100$). Aflați ultimele 1124 de cifre ale produsului $P=A\cdot B$.

Problema BJ6. Cercul înscris în triunghiul *ABC* atinge latura *AB* în punctul *D*. Cercul înscris în triunghiul *ADC* atinge laturile *AD* și *AC* în punctele *P* și, respectiv *Q*. Cercul înscris în triunghiul *BDC* atinge laturile *BC* și *BD* în punctele *M* și, respectiv *N*. Demonstrați că patrulaterul *PQMN* este inscriptibil.

Problema BJ7. Pe tablă sunt scrise *n* numere naturale distincte. O *procedură* înseamnă următoarele operații: se aleg două numere dintre cele scrise pe tablă, ele se șterg, iar în locul lor se scriu două numere care se obțin dacă la unul dintre numerele șterse se adaugă 1, iar din altul se scade 1. Determinați cea mai mică valoare posibilă a diferenței dintre cel mai mare și cel mai mic număr dintre cele ce sunt scrise pe tablă după efectuarea unor astfel de proceduri.

Problema BJ8. Aflați toate perechile de numere reale (a,b), pentru care cel mai mare dintre numerele $x = b^2 - \frac{a-1}{2}$ și $y = a^2 + \frac{b+1}{2}$ nu depășește numărul $\frac{7}{16}$.

BARAJUL 3

Problema BJ9. Găsiți toate numerele reale *x* care verifică ecuația: $x - 3\{x\} - \{3\{x\}\} = 0$ (aici $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului *a*).

Problema BJ10. Aflați toate perechile (p, q) de numere prime *p* și *q*, pentru care numerele $p+q$ și $p+4q$ sunt simultan pătrate perfecte.

Problema BJ11. Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC*. Bisectoarea unghiului *ACB* intersectează latura *AB* în punctul *D*. Cercul circumscris triunghiului *ADC* intersectează latura *BC* în punctele distincte *C* și *E*. Dreapta, dusă prin vârful *B* paralel la dreapta *AE*, intersectează dreapta *CD* în punctul *F*. Demonstrați că triunghiul *AFB* este isoscel.

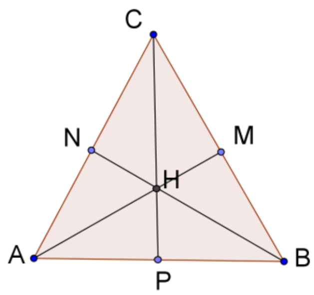
Problema BJ12. Determinați toate numere naturale nenule *n* pentru care există în șir finit de numere naturale $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ astfel încât pentru orice *k* $(1 \le k \le n)$ numărul a_k este numărul tuturor multiplilor numărului *k* în șirul *A*.

BARAJELE OBMJ 2020, 24-26 august 2020
SOLUȚII

BARAJUL 1

Problema BJ1. Fie triunghiul ABC cu ortocentrul H. Fie h_a, h_b, h_c lungimile înălțimilor duse din vârfurile A, B și, respectiv C, iar p semiperimetrul triunghiului ABC. Se știe că $AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{2}{3} \cdot p^2$. Arătați că triunghiul ABC este echilateral.

Rezolvare. Fie triunghiul ABC în care $BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ AM \perp BC,\ AM = h_a,$ $BN \perp CA,\ BN = h_b,\ CP \perp AB,\ CP = h_c$. Din asemănarea triunghiurilor dreptunghice CPB și CMH rezultă relația (vezi Fig. BJ1) $\frac{CP}{CM} = \frac{CB}{CH} \Leftrightarrow CH \cdot h_c = a \cdot CM$. Din $AM^2 = b^2 - CM^2 = c^2 - (a - CM)^2$ obținem $2a \cdot CM = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow a \cdot CM = (a^2 + b^2 - c^2)/2$. Astfel, $CH \cdot h_c = (a^2 + b^2 - c^2)/2$.



Analogic, $BH \cdot h_b = (a^2 + c^2 - b^2)/2,\ AH \cdot h_a = (b^2 + c^2 - a^2)/2$. Avem

$$AH \cdot h_a + BH \cdot h_b + CH \cdot h_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

Astfel,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = \frac{(a+b+c)^2}{6} \Leftrightarrow 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = (a+b+c)^2 \Leftrightarrow$$
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c.$$

În concluzie , triunghiul ABC este echilateral. □

Problema BJ2. Numerele reale pozitive $a,\ b,\ c$ satisfac egalitatea $a + b + c = 1$. Demonstrați identitatea:

$$\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}} + \sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}} + \sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}} = 2.$$

Rezolvare. Cum $a + b + c = 1$, avem

$$a + bc = a \cdot (a+b+c) + bc = a^2 + ab + ac + bc = a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(c+a),$$
$$b + ca = b \cdot (a+b+c) + ca = ab + b^2 + bc + ca = b(a+b) + c(a+b) = (a+b)(b+c),$$
$$c + ab = c \cdot (a+b+c) + ab = ac + bc + c^2 + ab = a(b+c) + c(b+c) = (b+c)(c+a).$$

Expresiile de sub semnele radicalilor din identitatea cerută se transformă astfel:

$$\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab} = \frac{(a+b)^2(b+c)(c+a)}{(b+c)(c+a)} = (a+b)^2,$$

$$\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}=\frac{(b+c)^2(a+b)(c+a)}{(a+b)(c+a)}=(b+c)^2,$$
$$\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}=\frac{(c+a)^2(a+b)(b+c)}{(a+b)(b+c)}=(c+a)^2.$$

În final, obținem

$$\sqrt{\frac{(a+bc)(b+ca)}{c+ab}}+\sqrt{\frac{(b+ca)(c+ab)}{a+bc}}+\sqrt{\frac{(c+ab)(a+bc)}{b+ca}}=$$
$$\sqrt{(a+b)^2}+\sqrt{(b+c)^2}+\sqrt{(c+a)^2}=$$
$$|a+b|+|b+c|+|c+a|=a+b+b+c+c+a=2\cdot(a+b+c)=2. \ \square$$

Problema BJ3. Fie un poligon regulat cu n laturi și cu centrul O. Determinați cel mai mare număr posibil de vârfuri k ($k \geq 3$), care pot fi colorate în culoare verde, astfel încât punctul O să se afle strict în exteriorul oricărui triunghi cu toate vârfurile colorate, în cazurile când: a) $n = 2019$; b) $n = 2020$.

Rezolvare. Soluția prezentată este valabilă pentru ambele cazuri, a) și b).

Evident, că dacă toate punctele colorate se află pe un semicerc, însă cu cel mult un punct colorat pe diametrul semicercului, atunci o astfel de colorare a vârfurilor poligonului, verifică condițiile din enunț.

Pentru $n = 2020$ se observă lesne că din oricare pereche de puncte (A_i, A_{i+1010}) ($i = 1, ..., 1010$) pot fi colorate cel mult un punct (dacă ar fi colorate ambele puncte, atunci punctul O ar aparține diametrului A_iA_{i+1010} și ar aparține oricărui triunghi cu trei vârfuri colorate $A_iA_{i+1010}A_j$, contradicție). Deci, $k \leq 1010$, iar valoarea maximă $k = 1010$ se realizează dacă luăm, de exemplu, 1010 vârfuri consecutive ale poligonului.

Soluția prezentată [n continuare este valabilă pentru ambele cazuri, a) și b).

Presupunem că sunt colorate k vârfuri ale poligonului regulat și punctul O se află în exteriorul oricărui triunghi cu vârfurile în puncte colorate. Vom arăta că toate punctele colorate se află pe un semicerc, însă cu cel mult un punct colorat pe diametrul semicercului.

Luăm un vârf arbitrar A dintre cele colorate și ducem diametrul AA_1. Dacă n este un număr impar, atunci A_1 nu este vârf al poligonului, iar dacă n este par, atunci A_1 este un vârf al poligonului care nu este colorat (în caz contrar O ar aparține conturului unui triunghi AA_1A_j cu toate vârfurile colorate, contradicție). Pe fiecare dintre cele două semicercuri AA_1 se conțin, fără vârfurile de pe diametru, exact câte 1009 vârfuri ale poligonului (atât pentru $n = 2019$, cât și pentru $n = 2020$).

Sunt posibile două cazuri.

1) Dacă unul dintre semicercurile AA_1 conține doar un singur vârf colorat A, atunci toate vârfurile colorate se află pe celălalt semicerc și numărul lor (împreună cu A) este $k \leq 1010$ (atât pentru $n = 2019$, cât și pentru $n = 2020$).

2) Presupunem că pe fiecare semicerc AA_1 există cel puțin câte un punct colorat diferit A. Alegem pe fiecare semicerc cel mai îndepărtat față de A punct colorat, fie vârfurile B și C. Ducem diametrul BB_1. Din aceleași considerente punctul B_1 nu este colorat. Punctele A și C se află pe unul și același semicerc BB_1 (în caz contrar, punctul O ar aparține triunghiului ABC cu vârfurile colorate, contradicție). Rezultă că toate punctele colorate se află pe arcul BAB_1 de pe același semicerc cu doar un punct colorat B pe diametrul BB_1. Rezultă că și în acest caz $k \leq 1010$ (atât pentru $n = 2019$, cât și pentru $n = 2020$).

Atât pentru n = 2019, cât și pentru n = 2020 se pot colora exact $k=1010$ vârfuri, de exemplu, 1010 vârfuri consecutive ale poligonului. Astfel, pentru ambele cazuri a) și b) avem $k=1010$.

Problema are răspuns pentru n arbitrar, și anume pentru $n \geq 5$ avem $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, iar pentru $n<5$ nu există astfel de k. □

Problema BJ4. Numărul natural n se numește *k-pătrat* dacă el poate fi reprezentat ca sumă a k pătrate perfecte nenule.
a) Arătați că numărul 2020 este 2-pătrat, 3-pătrat și 4-pătrat.
b) Determinați toate completele de numere naturale nenule (a, b, c, d, e) ($a<b<c<d<e$), care verifică simultan condițiile: toate numerele $e-2,\ e,\ e+4$ sunt prime și $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=2020$.

Rezolvare. a) Dacă $x \in Z$, atunci $x^2 \in M_4$ sau $x^2 \in M_4+1$. Cum $2020 \in M_4$ rezultă că dacă $x^2+y^2=2020$, atunci $x=2n,\ y=2m,\ m,n \in N^*$ și $m^2+n^2=505$. Rezultă că $m^2 \in M_4$, iar $n^2 \in M_4+1$. Avem

$$m^2=144,\ n^2=361 \Rightarrow x=38,\ y=24,\ 38^2+24^2=2020.$$

Dacă $2020=p^2+q^2+r^2$, atunci $p^2, q^2, r^2 \in M_4$. Dacă $p=2u,\ q=2v,\ r=2w$, atunci $u^2+v^2+w^2=505$. Cum $505 \in M_4+1$, rezultă că $u^2, v^2 \in M_4,\ w^2 \in M_4+1$. Avem $u=18,\ v=10,\ w=9 \Rightarrow p=36,\ q=20,\ r=18$. Astfel, $2020=36^2+20^2+18^2$.

Deoarece $20^2=16^2+12^2 \Rightarrow 2020=36^2+18^2+16^2+12^2$. Există și alte soluții în acest caz. De exemplu, $2020=17^2+19^2+23^2+29^2$, unde 17, 19, 23, 29 sunt 4 numere prime consecutive.

b) Avem $2020=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2<5e^2$. Cum e este număr prim, obținem $e \in \{23, 29, 31, 37, 41, 43\}$. Cum $e-2,\ e,\ e+4$ sunt prime, rezultă că $e=43$. Atunci $a^2+b^2+c^2+d^2=171$ (*).

Pentru d = 13 sau d = 12 nu există numere naturale a,b,c care satisfac egalitatea (*).

Pentru d = 11 există a = 3, b = 4, c = 5.

Pentru d = 9 există două complete de numere a = 1, b = 5, c = 8 și a = 4, b = 5, c = 7.

Pentru $d \leq 8$ nu există numere naturale a,b,c.

Astfel, în total există trei complete pentru (a,b,c,d,e): (3, 4, 5, 11, 43), (1, 5, 8, 9, 43) și (4, 5, 7, 9, 43), care verifică enunțul b) al problemei. □

BARAJUL 2

Problema BJ5. Fie numerele $A = 1^{a_1} 2^{a_2} 3^{a_3} \cdot \ldots \cdot 100^{a_{100}}$ și $B = 1^{b_1} 2^{b_2} 3^{b_3} \cdot \ldots \cdot 100^{b_{100}}$, unde $a_i, b_i \in \mathrm{N}$, $a_i + b_i = 101 - i$, $(i = 1,2,\ldots,100)$. Aflați ultimele 1124 de cifre ale produsului $P = A \cdot B$.

Rezolvare. Pentru produsul $P = A \cdot B$ avem

$$P = 1^{a_1+b_1} \cdot 2^{a_2+b_2} \cdot \ \ldots \ \cdot 100^{a_{100}+b_{100}} = 1^{100} \cdot 2^{99} \cdot \ \ldots \ \cdot 99^2 \cdot 100^1 = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot C,$$

unde C este impar și nedivizibil la 5. Cum $\alpha, \beta \in N^*$, $\alpha > \beta$, rămâne să calculăm exponentul β.

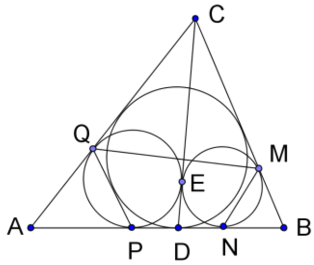
Evidențiem în produsul P puterile multiplilor lui 5: 5^{96}, 10^{91}, 15^{86}, . . . , 95^6, 100^1. În fiecare putere evidențiată obținem o putere a lui 5 la exponentul respectiv, astfel încât in produsul P vor exista cel puțin 760 de 5, deoarece

$$\beta_1 = 1 + 6 + \ \ldots + 86 + 91 + 96 = \frac{1+96}{2} \cdot 20 = 970.$$

Evidențiem în produsul P puterile multiplilor lui 25: 25^{76}, 50^{51}, 75^{26}, 100^1. În fiecare putere evidențiată obținem încă o putere a lui 5 la exponentul respectiv, astfel încât in produsul P vor exista încă 154 de 5, deoarece $\beta_2 = 1 + 26 + 51 + 76 = 154$. Avem $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 970 + 154 = 1124.$ Astfel, produsul $P = A \cdot B = 2^{1124} \cdot 5^{1124} \cdot 2^{\alpha - 1124} \cdot C = 10^{1124} \cdot 2^{\alpha-1124} \cdot C$. Deci, ultimele 1124 de cifre ale produsului P sunt zerouri. □

Problema BJ6. Cercul înscris în triunghiul *ABC* atinge latura *AB* în punctul *D*. Cercul înscris în triunghiul *ADC* atinge laturile *AD* și *AC* în punctele *P* și, respectiv *Q*. Cercul înscris în triunghiul *BDC* atinge laturile *BC* și *BD* în punctele *M* și, respectiv *N*. Demonstrați că patrulaterul *PQMN* este inscriptibil.

Rezolvare. Cercurile înscrise în triunghiurile *ADC* și *BDC* ating latura *CD* în același punct *E*, deoarece conform proprietăților tangentelor duse la un cerc dintr-un punct exterior cercului, avem (vezi figura BJ6) $CQ = CE = CM$. Analogic, $AP = AQ$, $BM = BN$. Cum triunghiurile *APQ*, *BMN* și *CMQ* sunt isoscele, rezultă că



$m(\angle APQ) = 90^0 - m(\angle A)/2,\ m(\angle DPQ) = 90^0 + m(\angle A)/2,$

$m(\angle BMN) = 90^0 - m(\angle B)/2,\ m(\angle CMN) = 90^0 + m(\angle B)/2,$

$m(\angle CMQ) = 90^0 - m(\angle C)/2,\ m(\angle BMQ) = 90^0 + m(\angle C)/2.$

Atunci obținem relațiile

$$m(\angle QMN) = m(\angle BMQ - m(\angle BMN) = 90^0 + m(\angle C)/2 - 90^0 + m(\angle B)/2 =$$
$$\left(m(\angle C) + m(\angle B)\right)/2 = \left(180^0 - m(\angle A)\right)/2 = 90^0 - m(\angle A)/2.$$
$$m(\angle QMN) + m(\angle DPQ) = 90^0 - m(\angle A)/2 + 90^0 + m(\angle A)/2 = 180^0$$

Rezultă, că patrulaterul *PQMN* este inscriptibil. □

Problema BJ7. Pe tablă sunt scrise *n* numere naturale distincte. O procedură înseamnă următoarele operații: se aleg două numere dintre cele scrise pe tablă, ele se șterg, iar în locul lor se scriu două numere care se obțin dacă la unul dintre numerele șterse se adaugă 1, iar din altul se scade 1. Determinați cea mai mică valoare posibilă a diferenței dintre cel mai mare și cel mai mic număr dintre cele ce sunt scrise pe tablă după efectuarea unor astfel de proceduri.

Rezolvare. Notăm numerele scrise inițial pe tablă cu $a_1, a_2, ..., a_n$, iar media aritmetică a lor cu *m*, adică $a_1 + a_2, + ... + a_n = mn$.

Observăm că în urma oricărei proceduri suma numerelor scrise pe tablă rămâne neschimbata, adică *mn*, de asemenea nu se schimbă media lor aritmetică.

Fixăm termenul a_n. Alegem consecutiv perechile (a_i, a_n). Efectuăm de fiecare dată numărul necesar de proceduri pentru a obține din termenul a_i numărul [*m*] (partea întreagă a numărului *m*). În final vom obține șirul finit de numere $[m],[m],...,[m],\tilde{a}_n$, unde $\tilde{a}_n = mn - (n-1)\cdot[m]$. Menționăm că acest șir conține $n-1$ numere egale cu [m].

Avem două cazuri.

1) Media aritmetică *m* este un număr întreg, adică $[m] = m$. Atunci $\tilde{a}_n = m$. În acest caz obținem toate numerele egale între ele și diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr este 0.

2) Media aritmetică *m* nu este un număr întreg, adică $[m] < m$. Atunci $\tilde{a}_n = [m] + n\cdot\{m\} > m$, unde $\{m\}$ este partea fracționară a numărului *m*. Menționăm că $n\cdot\{m\}$ este un număr întreg. Luăm consecutiv perechea formată din unul dintre numerele [*m*] și ultimul (care este și cel mai mare) număr din șir, la primul număr adunăm 1, iar din al doilea scădem 1. Aplicăm procedura de $[n\cdot\{m\}]-1$ ori (putem efectua aceste proceduri deoarece se vor utiliza mai puțin de $n-1$ numere de [*m*]). În final, ultimul număr din șir va fi egal cu

$$[m] + n\cdot\{m\} - [n\cdot\{m\}] + 1 = [m] + 1$$

(deoarece termenul al doilea și al treilea din sumă sunt numere întregi și, deci, sunt egale). Ca rezultat, toate numerele din șir vor fi egale sau cu [*m*] sau cu $[m]+1$, și vom avea numere de ambele valori. În acest caz diferența dintre cel mai mare și cel mai mic număr este 1. Această diferența nu poate fi făcută zero, deoarece media aritmetică *m* nu este un număr întreg.

Astfel, dacă media aritmetică a numerelor inițiale de pe tablă este un număr întreg, atunci cea mai mică diferența posibilă dintre cel mai mare și cel mai mic număr, care poate fi obținută, este 0. Dacă media aritmetică a numerelor inițiale nu este un număr întreg, atunci cea mai mică diferența posibilă dintre cel mai mare și cel mai mic număr, care poate fi obținută, este 1. □

Problema BJ8. Aflați toate perechile de numere reale (a, b), pentru care cel mai mare dintre numerele $x = b^2 - \frac{a-1}{2}$ și $y = a^2 + \frac{b+1}{2}$ nu depășește numărul $\frac{7}{16}$.

Rezolvare. Ipotezele sunt echivalente cu sistemul

$$\begin{cases} b^2 - \frac{a-1}{2} \le \frac{7}{16} \\ a^2 + \frac{b+1}{2} \le \frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 - a \le -\frac{1}{8} \\ 2a^2 + b \le -\frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge 2b^2 + \frac{1}{8}, \\ b \le -2a^2 - \frac{1}{8}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a+b \geq 2b^2 + b + \dfrac{1}{8} = 2\left(b+\dfrac{1}{4}\right)^2 \geq 0, \\ a+b \leq -2a^2 + a - \dfrac{1}{8} = -2\left(a-\dfrac{1}{4}\right)^2 \leq 0. \end{cases}$$

De aici rezultă că $a+b=0$, iar $a=\frac{1}{4}$ și $b=-\frac{1}{4}$

Există o singură pereche $(a,\ b)=\left(\frac{1}{4},\ -\frac{1}{4}\right)$, pentru care cel mai mare dintre numerele x și y nu depășește numărul $\frac{7}{16}$. □

BARAJUL 3

Problema BJ9. Găsiți toate numerele reale x care verifică ecuația: $x-3\{x\}-\{3\{x\}\}=0$ (aici $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului a).

Rezolvare. Înlocuim $x=[x]+\{x\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea întreagă a numărului a, și obținem $[x]=2\{x\}+\{3\{x\}\}$. Deoarece partea dreaptă a ecuației poate lua valori doar în intervalul [0,3), rezultă că [x] poate avea valori doar printre următoarele: 0, 1, 2. Analizăm aceste trei cazuri.

1) Dacă $[x]=0$, atunci $2\{x\}+\{3\{x\}\}=0$, de unde rezultă $\{x\}=0$, și, deci, $x=0$.

2) Dacă $[x]=1$, atunci $2\{x\}+\{3\{x\}\}=1$, de unde rezultă că $\{x\}\leq\frac{1}{2}$. Aici avem posibile câteva cazuri.

2.1) Dacă $3\{x\}<1$, atunci obținem $2\{x\}+3\{x\}=1$, de unde rezultă $\{x\}=\frac{1}{5}$, și, deci, $x=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$.

2.2) Dacă $1\leq 3\{x\}<2$, atunci obținem $2\{x\}+3\{x\}-1=1$, de unde rezultă $\{x\}=\frac{2}{5}$, și, deci, $x=1+\frac{2}{5}=\frac{7}{5}$.

2.3) Cazul $3\{x\}\geq 2$ este imposibil, deoarece contrazice p. 2).

3) Dacă $[x]=2$, atunci $2\{x\}+\{3\{x\}\}=2$. Și aici avem posibile câteva cazuri.

3.1) Dacă $3\{x\}<1$, atunci obținem $2\{x\}+3\{x\}=2$, de unde rezultă $\{x\}=\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$, contradicție.

3.2) Dacă $1\leq 3\{x\}<2$, atunci obținem $2\{x\}+3\{x\}-1=2$, de unde rezultă $\{x\}=\frac{3}{5}$, și, deci, $x=2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}$.

3.3) Dacă $2\leq 3\{x\}<3$, atunci obținem $2\{x\}+3\{x\}-2=2$, de unde rezultă $\{x\}=\frac{4}{5}$, și, deci, $x=2+\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$.

Mulțimea soluțiilor ecuației este $S=\{0,\frac{6}{5},\frac{7}{5},\frac{13}{5},\frac{14}{5}\}$. □

Problema BJ10. Aflați toate perechile $(p,\ q)$ de numere prime p și q, pentru care numerele $p+q$ și $p+4q$ sunt simultan pătrate perfecte.

Rezolvare. Fie $p+q=x^2$ și $p+4q=y^2$ pentru careva numere naturale nenule x și y. Prin scădere obținem egalitatea $3q=y^2-x^2=(y-x)(y+x)$. Deoarece $q\geq 2$ este număr prim, iar $x+y\geq 2$, avem următoarele posibilități:

1) $y-x=1$ și $y+x=3q$. Avem

$$\begin{cases} y=x+1 \\ 2x+1=3q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3m+2 \\ q=2m+1 \\ x=3m+1 \\ p=x^2-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2m+1 \\ p=9m^2+4m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2m+1 \\ p=m\cdot(9m+4) \end{cases}.$$

Cum p este număr prim, rezultă că $m=1,\quad p=13,\quad q=3.$ Avem $p+q=16=4^2, p+4q=25=5^2.$

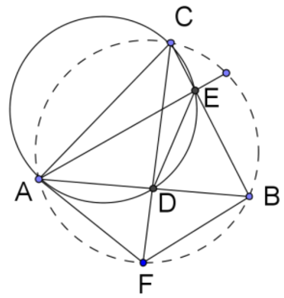
2) $y-x=3$ și $y+x=q$. Avem

$$\begin{cases} y=x+3 \\ 2x+3=q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ q=2x+3 \\ p=x^2-q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2x+3 \\ p=x^2-2x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=2x+3 \\ p=(x-3)\cdot(x+1) \end{cases}.$$

Cum p este număr prim, rezultă că $x=4,\quad p=5,\quad q=11.$ Avem $p+q=16=4^2, p+4q=49=7^2.$

3) $y-x=q$ și $y+x=3$. Cum x și y sunt numere naturale nenule, rezultă că $2\le q=y-x< y+x=3$. Obținem $q=2$. Sistemul de ecuații $y-x=2$ și $y+x=3$ este incompatibil in mulțimea $N^*\times N^*$. Astfel, $(p,q)\in\{(13,\ 3),\ (5,11)\}$. Prin verificare se confirmă că acestea sunt soluții. □

Problema BJ11. Fie triunghiul ascuțitunghic *ABC*. Bisectoarea unghiului *ACB* intersectează latura *AB* în punctul *D*. Cercul circumscris triunghiului *ADC* intersectează latura *BC* în punctele distincte *C* și *E*. Dreapta, dusă prin vârful *B* paralel la dreapta *AE*, intersectează dreapta *CD* în punctul *F*. Demonstrați că triunghiul *AFB* este isoscel.



Rezolvare. Fie $m(\angle ACB)=\gamma,$ atunci $m(\angle ACD)=m(\angle BCD)=\gamma/2.$ Cum patrulaterul *ACED* este inscriptibil, rezultă că

$$m(\angle DAE)=m(\angle DCE)=m(\angle BCD)=\gamma/2.$$

Din paralelismul dreptelor *AE* și *BF* obținem congruența unghiurilor alterne interne ABF și BAE, adică

$$m(\angle ABF)=m(\angle BAE)=m(\angle DAE)=\gamma/2.$$

Obținem că $m(\angle ACF)=m(\angle ABF)=\gamma/2,$ fapt care arată că patrulaterul *ACBF* este inscriptibil. Atunci

$$m(\angle BCF)=m(\angle BAF)=m(\angle ABF)=\gamma/2.$$

Rezultă că triunghiul *ABF* este isoscel. □

Problema BJ12. Determinați toate numere naturale nenule *n* pentru care există în șir finit de numere naturale $A=(a_1,a_2,...,a_n)$ astfel încât pentru orice k $(1\le k\le n)$ numărul a_k este numărul tuturor multiplilor numărului *k* în șirul *A*.

Rezolvare. Pentru $n \le 2$ există astfel de șiruri. Pentru $n=1$ luăm $A=(1)$, pentru $n=2$ luăm $A=(1,2)$. Evident, aceste șiruri verifică condiția.

Să arătăm că pentru $n \ge 3$ nu există astfel de șiruri.

Presupunem contrariul, că pentru un număr natural $n \ge 3$ există în șir de numere naturale $A=(a_1, a_2, ..., a_n)$ astfel încât pentru orice *k* ($1 \le k \le n$) numărul a_k este numărul multiplilor numărului *k* în șirul *A*.

Menționăm că $a_k \ne 0$ pentru orice *k* (în caz contrar, dacă există $a_k = 0$, atunci *k* îl divide pe a_k și ar trebui să fie $a_k \ge 1$, contradicție). Conform condițiilor $1 \le a_k \le n$ pentru orice *k*.

Observăm că $a_1 = n$ (numărul 1 divide orice alt număr natural).

Fie $a_n = m \ge 1$. Atunci există *m* termeni, care se divid cu *n*, adică *m* termeni egali cu *n*. Notăm cu *p* cel mai mare dintre indicii acestor termeni. Astfel, $a_p = n$ și numărul *p* divide toți termenii șirului, inclusiv *p* îl divide pe $a_n = m$. Rezultă că $p \le m$ și, ca urmare, $p = m$, iar $a_1 = a_2 = ... = a_m = n$.

Deoarece $a_{n-1} \ge 1$, rezultă că în șir există cel puțin un multiplu al lui $n-1$, care poate fi doar $n-1$ (deoarece din $n \ge 3$ rezultă că $2(n-1) > n$). Astfel, există $a_q = n-1$. Prin urmare, numărul *q* ($q > m$) divide $n-1$ termeni din șirul *A*, adică divide toți termenii, cu excepția unui termen. Șirul *A* conține termenii $a_1 = n$, $a_q = n-1$ și $a_n = m$. Dar *q* nu îl divide pe *m*, iar cel mai mare divizor comun al numerelor *n* și $n-1$ este 1. Obținem $q=1$, contradicție cu $q > m \ge 1$.

Prin urmare, pentru $n \ge 3$ nu există astfel de șiruri.

Valorile posibile ale lui *n* sunt doar $n=1$ și $n=2$. □