Secțiunea Juniori
Simulare baraj 1
20 decembrie 2020

- Soluții -

Selecție probleme
Prof. Lioara Ivanovici

§1 Soluții

Problema 1

Aflați numărul tuturor perechilor de numere întregi pozitive (m, n) astfel încât $n|12m - 1$ și $m|12n - 1$.

Demonstrație. Dacă $m = n$ atunci $m|12m - 1$, adică $m = 1$ și obținem perechea $(1, 1)$.

Observăm ușor că dacă perechea (m, n) este soluție a problemei atunci și perechea (n, m) este soluție. Din acest motiv este suficient să căutăm perechile (m, n) cu $m < n$.

Prin urmare $n|12m - 1$ si $12m - 1 < 12n - 1$ implică $12m - 1 = n$, sau $12m - 1 = 5n$, sau $12m - 1 = 7n$ sau $12m - 1 = 11n$. Asta pentru că $12m - 1$ este număr impar nedivizibil cu 3.

Dacă $n = 12m - 1$, atunci din condiția $m|12n - 1$ rezultă că $m|144m - 13$, adică $m|13$. De aici obținem perechile de soluții $(1, 11)$ și $(13, 155)$.

Dacă $5n = 12m - 1$, cum $m|60n - 5$ rezultă că $m|144m - 17$, de unde $m|17$. În acest caz nu obținem soluții.

Dacă $7n = 12m - 1$ cu un raționament similar vom ajunge la o contradicție.

În final, dacă $11n = 12m - 1$, se obține soluția $(23, 25)$.

Numărul perechilor ordonate care sunt soluții ale problemei este 7. □

Barem:

- Scrie că perechea $(1,\ 1)$ este o soluție . . . 1*p*
- Scrie care sunt valorile posibile pentru $12m - 1$ ca multipli de n sau $12n - 1$ ca multipli de m . . . 2*p*
- Rezolvă fiecare dintre cele 4 cazuri și găsește soluțiile corecte . . . 4*p*

Problema 2

Considerăm o tablă pătrată 6×6 formată din 36 pătrățele unitate. Definim o "diagonală" ca fiind cele șase pătrățele de coordonate (i, j), $1 \le i, j \le 6$ pentru care $i - j = k \pmod 6$, unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Avem deci 6 diagonale. Demonstrați că este imposibil să punem numerele de la 1 la 36 în pătrățelele tablei, astfel încât fiecare număr apare exact o dată, iar suma numerelor de pe orice linie, coloană sau diagonală să fie aceeași.

Demonstrație. Vom nota cu d_k diagonala pentru care $i - j = k \pmod 6$.
Să observăm că diagonalele sunt formate astfel: diagonala d_0 conține toate pătrățelele $(1, 1), (2, 2), (3, 3)...(6, 6)$; diagonala d_1 conține pătrățelele $(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (1, 6)$ si asa mai departe.

Pătrățelele care au ambele coordonate impare se găsesc doar pe diagonalele de indici pari (d_0, d_2, d_4) .

Suma tuturor numerelor este $1 + 2 + \cdots + 36 = 18 \cdot 37 = 666$, deci suma de pe fiecare linie, coloană și diagonală trebuie să fie $\frac{666}{6} = 111$. Fie L_i, C_j suma numerelor de pe linia i, respectiv coloana j, iar D_k suma numerelor de pe diagonala d_k. Atunci:

$$333 = L_1 + L_3 + L_5 + C_1 + C_3 + C_5 - D_1 - D_3 - D_5,$$

iar suma din membrul drept este de două ori suma pătrățelelor care au ambele coordonate impare.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
L1	d0	d5	d4	d3	d2	d1
L2	d1	d0	d5	d4	d3	d2
L3	d2	d1	d0	d5	d4	d3
L4	d3	d2	d1	d0	d5	d4
L5	d4	d3	d2	d1	d0	d5
L6	d5	d4	d3	d2	d1	d0

Cum 333 este un număr impar, acest lucru este imposibil. □

Barem:

- Scrie că pătrățelele cu ambii indici impari se găsesc doar pe liniile și coloanele impare, respectiv pe diagonalele pare 2p
- Calculează suma posibilă de pe fiecare linie, coloană, respectiv diagonală 1p
- Calculează diferența dintre suma numerelor de pe liniile și coloanele impare și suma numerelor de pe diagonalele impare 3p
- Justifică de ce nu este posibilă amplasarea numerelor în pătrățele 1p

Problema 3

Determinați numărul de moduri distincte de a partiționa mulțimea numerelor naturale în două submulțimi, astfel încât în fiecare submulțime raportul oricăror două elemente nu este număr prim.

Demonstrație. Considerăm o partiție a mulțimii numerelor naturale în două submulțimi A și B, astfel încât în fiecare submulțime raportul oricăror două elemente nu este număr prim.

Presupunem, fără a restrânge generalitatea problemei, că $1 \in A$. Observăm că toate numerele prime se află în B. Orice număr natural mai mare ca 1 se poate scrie sub forma $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sunt numere prime distincte, iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sunt numere naturale pozitive. Notăm $h(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$.

Folosind metoda inducției matematice, în funcție de $h(n)$, deducem că dacă $h(n)$ este par, atunci $n \in A$. Altfel, dacă $h(n)$ este impar, atunci $n \in B$.

Cazul de bază: Dacă $h(n) = 1$, atunci n este prim, deci $n \in B$.
Pentru $h(n) = 2$ avem două situații: fie $n = p^2$, fie $n = p \cdot q$, unde p și q sunt numere prime distincte. În fiecare situație raportul $\frac{n}{p}$ este număr prim, prin urmare $n \in A$.

Pasul Inductiv: Vom presupune că afirmația este adevărată pentru $h(n) = m$, $m \in \mathbb{N}$. Vom demonstra că este adevărat și pentru $h(n) = m + 1$. Fie $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ cu $h(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = m + 1$. Dacă m este par și $\alpha_1 > 1$, atunci

$$h(p_1^{\alpha_1 - 1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}) = m$$

prin urmare,

$$p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \in A$$

Din ipoteză deducem că:

$$n = p_1 \cdot p_1^{\alpha_1-1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \in B$$

Dacă $\alpha_1 = 1$, atunci:

$$h(p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = m$$

și

$$p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \in A \implies n = p_1 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k} \in B$$

Dacă m este impar, demonstrația este analoagă cazului de mai sus. Astfel, am demonstrat că afirmația este adevărată. Am obținut astfel că mulțimiile A și B sunt unic determinate mai puțin poziționarea lui zero, care nu este nici prim, nici compus, prin urmare nu contează din care mulțime face parte. Pe de altă parte, în mod evident mulțimiile A și B satisfac condițiile problemei. În concluzie, numărul de partiții căutat este 2. $\square$

Barem:

- Scrie că 1 și numerele prime sunt în mulțimi distincte . . . . $1p$
- Scrie că numerele cu suma exponenților număr par sunt în aceeași mulțime cu 1, iar cele cu suma exponenților număr impar sunt în cealaltă mulțime. . . . . $1p$
- Demonstrează cazul de bază din metoda inducției matematice . . . . $1p$
- Demonstrează complet prin inducție matematică unicitatea partiției mai puțin distribuirea lui zero . . . . $4p$

Problema 4

Fie $a, b, c > 0$, cu proprietatea $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Arătaţi că are loc inegalitatea:

$$2\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c}\right) + b^2 + 3c^2 \geq 24.$$

Profesor Mihaela Berindeanu

Demonstraţie. Din inegalitatea mediilor

$$a^3 + 2 \geq 3\sqrt[3]{a^3} = 3a \tag{1}$$

Împărţind relaţia (1) la a obţinem:

$$a^2 + \frac{2}{a} \geq 3 \Rightarrow 2a^2 + \frac{4}{a} \geq 6 \tag{2}$$

Şi analog

$$b^2 + \frac{2}{b} \geq 3 \Rightarrow 3b^2 + \frac{6}{b} \geq 9 \tag{3}$$

$$c^2 + \frac{2}{c} \geq 3 \Rightarrow 5b^2 + \frac{10}{c} \geq 15 \tag{4}$$

Suma relaţiilor (2), (3), (4) este

$$2a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 2\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c}\right) \geq 30$$

unde

$$2a^2+3b^2+5c^2=2\underbrace{\left(a^2+b^2+c^2\right)}_{=3}+b^2+3c^2=6+b^2+3c^2$$

Egalitatea se realizează pentru $a=b=c=1$ $\square$

Barem:

- Demonstrează fiecare dintre inegalitățile $2a^2+\dfrac{4}{a}\geq 6$, $3b^2+\dfrac{6}{b}\geq 9$, $5b^2+\dfrac{10}{c}\geq 15$ 4p
- Însumează cele trei inegalități obținute și folosește condiția inițială 2p
- Obține cazul de egalitate 1p

Timp de lucru: 240 de minute.
Pentru fiecare problemă se acordă maxim 7 puncte.
Nu este permisă utilizarea calculatorului sau a oricărui alt instrument, cu excepția riglei și a compasului.